Composition de Mathématiques, Filière PC

Rapport de MM. Stéphane ATTAL et M. Yuri BILU, correcteurs.

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant N < 4$	29	2,3 %
$4 \leqslant N < 8$	537	41,7 %
$8 \leqslant N < 12$	529	41,1 %
$12 \leqslant N < 16$	161	12,5 %
$16 \leqslant N \leqslant 20$	26	2 %
N=20	6	0,5 %
Total	1288	100 %
Nombre de copies : 1288		
Note moyenne 8,9		
Écart-type : 3,1		

Ces notes sont des notes de classement dont la moyenne apparemment satisfaisante ne traduit pas la perception décevante que les correcteurs ont retirée de l'examen des copies.

Le sujet nous semble bien adapté au niveau de la filière PC, complet et accessible, voire facile. Nous sommes vraiment surpris qu'il ait pu paraître bien difficile à une majorité de candidats. Trop d'entre eux peinent à effectuer un raisonnement logique de plus de 2 ou 3 étapes : les questions qui demandaient un peu plus qu'une application facile et directe du cours ont été traitées par 10% des candidats. Trop d'entre eux peinent également à mener à bon terme un calcul standard.

Passons maintenant aux détails, question par question.

Première partie

La première partie est la seule des trois parties qui ait été traitée correctement par l'ensemble des candidats. Une immense majorité des copies ont été notées uniquement sur cette partie.

Question 1. Elle a été résolue sans trop de problème par la très grande majorité. Il est tout de même étonnant de voir à ce niveau des étudiants ne sachant pas faire un tableau de variations correct. Il est aussi important de noter que répondre à une telle question ne doit pas prendre plus d'une demi-page.

Questions 2., 3.a), 3.b), 3.c) Aucun souci. Ces questions ont quasiment toujours été résolues sans difficulté.

Question 4.a) Les résultats sont plutôt bons en général, mais on trouve trop souvent des erreurs de calcul. C'est une chance que ce sujet comporte autant de questions indépendantes, car ce genre d'erreur pourrait entacher toute une copie avec d'autres types de sujets. On ne saurait trop recommander aux candidats de faire preuve d'attention dans la conduite de leurs calculs et de les vérifier.

Question 4.b) Dans l'ensemble, cette question a été bien comprise. Mais il est inadmissible à ce niveau de voir des réponses du genre « on voit sur les 10 premiers termes que la suite est périodique de période 7, donc elle est périodique de période 7 ».

Question 4.c) On a vu souvent des candidats "comprendre" ce qu'il fallait faire pour cette question, mais avoir beaucoup de mal à le justifier complètement. Quand on additionne les termes d'une suite périodique, la somme diverge toujours vers $+\infty$ ou $-\infty$, sauf si la somme des valeurs sur une période vaut exactement 0.

Question 5.a) Les résultats sont souvent bons à cette question, mais les arguments ou les calculs sont souvent extrêmement longs (jusqu'à 6 pages !!). Quand une matrice M est diagonalisable, comme c'est le cas dans cette question, la trace de M^n se calcule sans aucune difficulté !

Question 5.b) Très peu de candidats ont répondu complètement à cette question. L'immense majorité ne l'a pas abordée. Pour les autres, c'est une succession d'arguments approximatifs, d'utilisations mal justifiées d'équivalents etc. Il fallait se ramener à la suite (w_k) de la question 4.c), en utilisant l'identité établie en 5.a). Ensuite on montrait par un encadrement que cette nouvelle somme avait le même comportement que (w_k).

Deuxième partie

Question 6.a) Cette question simple a été complètement ratée par les candidats. La très grande majorité d'entre eux ont tout simplement dit que l'hypothèse impliquait : « x^n

tend vers 0 » (ou vers un nombre entier). Aucun d'entre eux n'a été troublé par le fait que dans les hypothèses on avait $x > 1$!

Question 6.b) Il s'agissait d'une question plus difficile, demandant un peu de calcul et d'estimations sur des intégrales. Bien entendu les résultats sont en relation : nous avons extrêmement peu de réponses correctes.

Question 6.c) Là encore, les réponses à cette question ont fâché les correcteurs. Il s'agissait d'une question très simple. Étant arrivé à une contradiction, il fallait prendre la contraposée de l'hypothèse. Un très grand nombre de candidats l'ont vu, mais quasiment aucun n'a su correctement prendre la contraposée de : « pour tout $x \in [\alpha, \beta]$, on a $\varphi(x^n) \to 0$ ». Nous avons vu toutes sortes de réponses incroyables, la plus fréquente étant « pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ on a $\varphi(x^n) \not\to 0$ ». Cela démontre des lacunes très importantes chez les candidats, en particulier en ce qui concerne la base : la logique.

Troisième partie

Question 7.a) Cette question simple demandait une certaine patience et une certaine précision dans les calculs, ce qui a manqué à laplupart des candidats : nous avons de nouveau une très faible minorité de résultats justes. Il y a de trop nombreuses fautes de calcul, beaucoup de confusion quand la période n'est pas 2π et beaucoup de candidats ont oublié de déterminer le coefficient c_0 !

Question 7.b) Cette question contient un indice caché pour la question 7.a) : l'inégalité désirée est impossible si c_q est de l'ordre de grandeur de $1/q$, ce qui était l'une des fautes les plus communes dans 7.a). Malheureusement, très peu de candidats ont honnêtement admis leur faute (ce qui était généreusement récompensé par les correcteurs) ; la grande majorité ont essayé de démontrer l'indémontrable.

Question 8. Un grand nombre des candidats ont correctement énoncé le Théorème de Dirichlet et déduit la convergence $S_p(\varphi) \to \varphi$. Beaucoup moins ont démontré l'inégalité démandée. Une faute typique : « prenons $\varepsilon = 1/p$ ... ».

Question 9. Malgré l'indication, les résultats sont bien médiocres, les réponses souvent très longues, voire incompréhensibles.

Question 10. C'est la seule question dans les deux dernières parties qui a été correctement résolue par un assez grand nombre des candidats.

Question 11. Comme indiqué ci-dessus, cette question, qui n'est pas très difficile en principe, dépend de la connaissance du coefficient $c_0(\varphi)$. En outre, elle demandait une certaine rigueur. Donc, nous avons eu très peu de bonnes réponses.

Question 12. Il s'agit d'un très bon test de compréhension de la définition de limite. Peu de candidats l'ont passé. Une faute typique : on suppose tacitement que la limite existe et on montre qu'elle vaut $1/4$. Une autre faute commune : beaucoup de candidats croient que $\max_{q\in\mathbb{N}} \frac{1}{\sin \pi\lambda q}$ existe.

Question 13. Peu de candidats sont arrivés à répondre à cette question. Mais parmi les réponses données, le plupart étaient correctes et même bien justifiées.