Composition de Mathématiques, Filière PC

Rapport de MM. VU NGOC San et M. YURI Bilu, correcteurs.

Le sujet était manifestement centré sur la manipulation de polynômes et demandait de la part du candidat une rigueur soutenue dans l'écriture des coefficients et des indices des différentes sommes. Ceci étant dit, de nombreuses questions étaient élémentaires. Un peu d'arithmétique de base (entiers modulo 2 ou 4) était la bienvenue. Les questions d'analyse complexe, reléguées en fin de sujet, ont été très peu approchées.

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant N < 4$	132	11,4%
$4 \leqslant N < 8$	621	30,6%
$8 \leqslant N < 12$	411	35,2%
$12 \leqslant N < 16$	101	18,7%
$16 \leqslant N \leqslant 20$	22	4,0%
Total	1287	100 %
Nombre de copies : 1287		
Note moyenne 7,63		
Écart-type : 3,19		

Ce problème proposait un petit nombre de questions difficiles, que seule une poignée de candidats a abordé, quelques questions un peu moins difficiles, où s'est jouée la sélection entre les meilleures notes et les autres, et enfin des questions faciles ou de difficulté standard, qui ont été abordées par la majorité des candidats.

Comme souvent, le sujet était pratiquement impossible à terminer dans le temps imparti. Il est clair que, malheureusement, la rapidité dans la résolution des questions faciles était un atout majeur pour obtenir une bonne note. De nombreux candidats, pris par le temps, n'ont pas profité des exercices de la deuxième partie, parfois plus faciles que ceux de la première.

Passons à l'examen détaillé des questions.

Partie I

1. Il ne faut jamais se précipiter sur la première question d'un problème. Il est étonnant de constater le nombre de candidats qui ne savent pas manier la *logique* nécessaire à la réponse à la simple question : tel élément appartient-il à tel ensemble ? En l'occurrence il fallait simplement montrer qu'il *existe au moins une* paire complémentaire de longueur 2, et qu'il n'*existe aucune* paire complémentaire de longueur 3. Une simple suite de calculs (ici très faciles) ne suffit pas à convaincre le correcteur de la logique infaillible du candidat !

2.a) Pratiquement aucun candidat n'a obtenu la note maximale à cette question, car la rédaction est difficile. Beaucoup parlent d'équivalence de polynômes. Mais sauf mention expresse du contraire, un polynôme en x n'a que des puissances positives de x, ce qui n'était évidemment pas le cas ici. Le plus sage était de s'en tenir à « une somme finie de fonctions puissances x^k », et d'invoquer les critères de comparaison de leurs croissances respectives en 0 ou en l'infini, après avoir soigneusement développé la formule proposée pour reconnaître les relations demandées. À ce sujet, trop nombreux sont les candidats qui n'isolent pas correctement les monômes degré par degré, avant de conclure hâtivement « par identification des degrés ».

2.b) La question sur la parité a été bien résolue, soit par récurrence ($a+b$ est toujours pair si a et b sont dans $\{-1;1\}$!), soit par un argument « à la main ». Attention néanmoins à bien lire l'énoncé : plusieurs candidats ont supposé que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ étaient complémentaires.

La décomposition en somme de carré a été massivement ratée. L'égalité immédiate était $2\ell = P_{\underline{a}}(1)^2 + P_{\underline{b}}(1)^2$. On pouvait alors par exemple écrire

$$\ell = \left(\frac{P_{\underline{a}}(1) - P_{\underline{b}}(1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{P_{\underline{a}}(1) + P_{\underline{b}}(1)}{2}\right)^2.$$

La réussite à cette question est souvent allée de pair avec une bonne note sur l'ensemble du sujet !

Notons que le 2ℓ a perturbé bon nombre de candidats. Certains ont manifestement bidouillé en amont pour obtenir ℓ comme par magie. D'autres ont même supposé que le sujet devait être erroné !

2.c) Cette question n'a pas eu beaucoup de succès. On peut supposer que peu de candidats sont à l'aise avec les raisonnements simples d'arithmétique. Il suffisait de remarquer qu'une somme de carrés d'entiers n'est jamais égale à 3 modulo 4. Le complémentaire de $\mathcal{L}$ est donc infini car *il contient* un ensemble infini, celui des entiers égaux à 3 modulo 4.

3.a) C'est probablement la question qui a été le mieux résolue par les candidats. Il suffisait de développer l'expression. Certains (bons) candidats ont eu des états d'âmes sur « le domaine de définition », ce qui n'était ici pas crucial.

3.b) Bête question de calcul. Bien sûr, l'usage du **3.a)** permet de simplifier un peu, mais la vérification directe était également possible. On ne demande pas au candidat tous les détails du calcul, mais il doit justifier qu'il les a faits correctement. Affirmer que toutes les conditions de corrélations sont satisfaites sans en écrire au moins quelques unes n'est pas recevable.

4. Ceux qui ont osé faire cette question se sont en général rendus compte qu'elle était facile. Seuls ceux qui ont eu le malheur de tenter une récurrence ne s'en sont pas sortis. Une récurrence était très difficile à utiliser ici. Des petits calculs modulo 2 ou 4 démontraient toutes les équivalences en quelques lignes.

5.a) Les candidats ont souvent réussi à utiliser l'équivalence entre les points (i) et (iii) de la question précédente. Attention malgré tout à bien rappeler que la somme des coefficients (ici nulle) est bien divisible par 4 !

5.b) Cette question s'est révélée très délicate pour les candidats. Il fallait soigneusement manipuler les indices pour s'en sortir par exemple avec une « récurrence finie », en vérifiant bien que les cas extrêmes ($j = 0$, $j = \ell - 1$) sont validés. On pouvait pour cela s'aider de la symétrie de la question en $j \leftrightarrow \ell - 1 - j$.

5.c) Il fallait bien visualiser la suite des x_j, en liaison avec la question **5.b)**, pour trouver l'argument, qui tient sur une ligne. Encore une question qui a souvent distingué les bons candidats.

Partie II

6.a) La plupart des candidats ont bien abordé cette question facile, mais il y a eu des échecs malheureux (comme $P_1(x) = 1 + x^2$ ou $P_1(x) = 2$), même parmi les bons candidats.

6.b) L'abus de l'algèbre linéaire a joué un mauvais rôle dans cette question. Les candidats qui ont calculé deux ou trois premiers termes, puis deviné la formule générale, ont bien réussi. Mais les candidats qui ont essayé la méthode « matricielle » se sont perdus dans des calculs énormes et ne sont pratiquement jamais arrivés à la solution.

Une autre source d'erreurs était le manque d'attention. Un grand nombre de candidats ont bien noté que les relations de récurrence étaient les mêmes pour P et pour Q, sans observer que les conditions initiales étaient différentes.

7. Pour réussir dans cette question on doit être très bien organisé. Il faut d'abord démontrer que $\deg P_n = \deg Q_n = 2^n$, puis qu'ils sont séquentiels, et, finalement, qu'ils forment une paire complémentaire. On peut le faire en une seule récurrence commune ou en trois récurrences séparées, mais l'ordre doit être comme indiqué ci-dessus. Les candidats qui n'ont pas observé cet ordre ont raté la question.

8. Bien que ne requérant que des manipulations élémentaires de formules, cette question s'est révélée relativement difficile : peu de candidats l'ont tentée, encore moins l'ont résolue.

9.a) Une des question les plus dures. Le nombre de candidats qui l'ont résolue n'excède pas 5. Il est difficile de trouver la méthode si l'on n'a pas déjà l'expérience d'exercices du même style.

9.b) Relativement nombreux sont ceux qui ont démontré l'inégalité à droite (en admettant la question **9a)**. Beaucoup moins ont observé que l'inégalité à gauche est une conséquence de celle à droite et de la question **8**. Personne n'a réussi à démontrer les inégalités strictes.

Une faute typique : au lieu de regarder P_n et Q_n individuellement, on considère le produit P_nQ_n.

10.a) Une question bien simple, résolue par une partie relativement importante des candidats. Comme la question **7**, elle demande un soin particulier.

10.b) La question la plus difficile, qui n'a été abordée que par un seul candidat.