Rapport de Mme Th. MERLIER et M. A. MOROIANU, correcteurs.

Ce problème a semble-t-il déconcerté les candidats, surtout dans les deux premières parties. Il s'agissait pourtant de choses connues, peut-être trop connues. Les candidats essaient en effet de reproduire ce qu'ils ont vu dans l'année et ce n'est pas toujours la meilleure méthode ; il faut dans la mesure du possible s'imprégner de l'esprit du problème. Rappelons une fois de plus qu'écrire « ce sont les fameux polynômes d'interpolation de Lagrange » ou « ce sont les polynômes de Legendre » ne résoud pas la question. Il est inutile d'étaler de telles connaissances. Il faudrait par contre que les candidats sachent utiliser. les questions précédentes (passage de la question **1** à la question **2** par exemple). Savoir calculer serait aussi très utile, surtout dans cette filière ; les résultats de la question **7**, ont vraiment été très mauvais. Un peu plus de rigueur dans les preuves serait la bienvenue.

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant$ N < 4	108	12,9%
$4 \leqslant$ N < 8	477	33,6%
$8 \leqslant$ N < 12	443	34,0%
$12 \leqslant$ N < 16	232	16,7%
$16 \leqslant$ N $\leqslant 20$	60	2,8%
Total	1320	100 %
Nombre de copies : 1320		
Note moyenne 8,97		
Écart-type : 3,85		

Analyse du problème

1. Cette question a vraiment posé des problèmes aux candidats. De $u \in F$ et $u + \lambda v \in F^{\perp}$, on déduit $\pi(u + \lambda v) = 0 = u + \lambda\pi(v)$, d'où $u = -\lambda\pi(v)$ et avec les deux autres conditions on trouvait $\lambda = \frac{\alpha}{||v-\pi(v)||}$. On avait par ces formules l'existence et l'unicité. Beaucoup de candidats ont *posé*, sans explications ou avec un vague dessin dans R^3, $u = -\lambda\pi(v)$. Dans ce cas, démontrer l'unicité devenait délicat. Enfin, beaucoup imaginent que si v n'appartient pas à F, il appartient à $F^{\perp}$...

2. Il suffisait d'appliquer la question **1** et de raisonner par récurrence. La surprise des correcteurs a été grande en voyant que les candidats savent *par cœur* les formules de l'orthonormalité de Gram-Schmidt. Beaucoup ont en effet appliqué cette méthode pour trouver les ω_i, l'unicité étant alors souvent oubliée.

3.a) Evident, mais souvent mal rédigé.

3.b) Il semblait naturel de construire la base P_n à partir de la base X^n. Beaucoup ont oublié de dire quelle était la base initiale. L'existence et l'unicité résultaient des questions précédentes mais il était essentiel de montrer que le coefficient k_n était positif. Il suffisait de remarquer que $k_n = \lambda$ dans la notation de la première question. Très peu de candidats ont résolu correctement ce point.

4.a) Question peu traitée. La plupart des candidats ont essayé de raisonner par récurrence. Il fallait écrire la division euclidienne de P_n par P_{n-1} et montrer que le reste (de degré au plus $n-2$) est orthogonal à P_j quel que soit $j < n-2$.

4.b) L'égalité $k_n = A_n k_{n-1}$ à été trouvée par tous. Quant à C_n, il fallait calculer $P_n|P_{n-2}$ et se rappeler que le produit scalaire est en fait défini par une forme linéaire, donc $XP_{n-1}|P_{n-2} = P_{n-1}|XP_{n-2}$, etc...

5. Peu de choses correctes sur cette question

a) S'il n'existe aucun zéro de multiplicité impaire, P_n garde un signe constant, $P_n \neq 0$, donc $\varphi(P_n) \neq 0$. Comme $n \geq 1$, $\varphi(P_n) = \varphi(1.P_n) = 1|P_n = 0$. D'où une contradiction.

b) Si P_n admet $a_1, ...a_r$ comme racines de multiplicité impaire, alors $Q(X) := (X - a_1)...(X - a_r)P_n(X)$ est de signe constant et $\varphi(Q) \neq 0$. Mais si $r < n$, $\varphi(Q) = P_n|(X - a_1)...(X - a_r) = 0$. Donc $r = n$.

6.a) Evident. Mais il fallait faire attention au fait que G était dans E_{2n-1} et pas nécessairement de degré $2n - 1$.

b) Question classique, bien traitée par une majorité de candidats.

c) Il fallait remarquer d'une part que $\varphi(G) = \varphi(R)$ et d'autre part que $R(a_i) = G(a_i)$, d'où le résultat avec $\lambda_i = \varphi(L_i)$.

d) Question traitée par moins d'une cinquantaine de candidats. Il fallait simplement penser à introduire le polynôme $H_j := P_n^2/(X - a_j)^2$ et à lui appliquer 6.c).

7. Le degré de F_n est évidemment n puisque on dérive n fois un polynôme de degré $2n$. Beaucoup de candidats ont voulu utiliser la formule de Leibniz et ont ainsi remarqué que chaque terme de la somme était de degré n. Cette démonstration était correcte à condition de préciser que tous les coefficients étaient positifs, ce que la plupart ont oublié de préciser. La formule de Leibniz appliquée à F_n puis à F_n' montre que $F_n(1) = n!2^n$ et $F_n'(1) = n(n+1)!2^{n-1}$ par exemple.

8. Il suffit de montrer que les F_n sont non-nuls et 2 à 2 orthogonaux. Les F_n sont non-nuls puisque leur valeur en 1 est non-nulle d'après **7**. Pour montrer l'orthogonalité on pouvait effectuer des intégrations par parties successives.

9. Eventuellement on pouvait calculer et montrer directement que $T(F_n) = n(n+1)F_n$, mais il fallait être soigneux dans les calculs ! On pouvait plus rapidement appliquer une méthode analogue à celle de la question **8**. Les candidats ont souvent eu l'idée mais la rigueur était rarement au rendez-vous. On a rarement évoqué le degré de $T(F_n)$ ou le cas $n = 0$.

10. Très souvent la réponse a été "les F_p sont vecteurs propres de T" ce qui était très insuffisant. E_n étant de dimension $n + 1$, on avait $n + 1$ vecteurs propres F_p, $p = 0..n$, non-colinéaires. Donc T était diagonalisable, avec les F_p comme base de vecteurs propres. Pour trouver λ_p on pouvait par exemple chercher les coefficients de degré p dans F_p et $T(F_p)$.

11.a) Presque tous les candidats ont fait cette question. On trouve $c_n = \frac{n(n+1)-\gamma}{(n+1)(n+2)}$. Il était maladroit (perte de temps...) d'exprimer c_n en fonction de n et c_0.

b) Le critère de d'Alembert donnait le rayon de convergence dans le cas général i.e. si $\gamma \neq n(n+1)$ pour tout n. Si $\gamma = n(n+1)$ pour un certain n, la solution est polynomiale, proportionnelle à F_n d'après **10**.

c) Il suffit d'appliquer le cours.

d) Question non-traitée. Seules les solutions polynomiales conviennent.