Rapport de M$^{\text{me}}$ Thérèse MERLIER et M. Emmanuel GERMAIN, correcteurs.

Appréciation générale

Cette année le sujet ne présentait aucune difficulté pour un mathématicien averti (même si certaines questions n'ont pas été traitées par les candidats), ainsi l'essentiel de la discrimination s'est fait sur la capacité à répondre rapidement et avec précision aux questions.

Mais de très nombreux candidats ont fait preuve de fébrilité :

– en ne lisant pas calmement le texte, ceux-ci se sont induits en erreur (par exemple dans la **question 5**, où l'on ne supposait plus que $f^2 = -Id$, ou en **5.c** en ne comprenant pas qu'il s'agissait des valeurs propres de f^2 et non pas de f). On pourrait même citer ce candidat qui pour la première question a démontré tout seul la **question 6** sans s'en apercevoir.

– en tentant de grapiller des points dans la **3$^{\text{e}}$ partie** sans comprendre le sens de ces dernières questions : il s'agissait de montrer que le pfaffien était un invariant plus fin que le déterminant pour les matrices antisymétriques d'ordre pair et qu'il permettait de résoudre très facilement des questions comme la **question 14** qui avait été posée dans le sujet de 2001. Or les candidats ont juste essayé d'utiliser le déterminant comme outil ce qui ne permettait pas de conclure (et accessoirement ne rapportait aucun point).

et aussi de précipitation dans la rédaction :

– en n'utilisant pas le cours avec discernement ils ont perdu du temps dans la **question 5.a** en tentant de redémontrer un théorème quand il suffisait de le citer dans le contexte de l'épreuve (on n'imagine pas que leurs professeurs aient oublié de mettre en évidence l'équivalence entre l'existence d'une base orthonormale de vecteurs propres de l'espace E et la décomposition de E en somme directe orthogonale des sous-espaces propres). À l'inverse certains candidats ont appliqué sans la citer une formule hors programme sur le déterminant par bloc pour la **question 2**. Comme la majeure partie du temps la formule qu'a cru utiliser le candidat était erronée, ceux-ci ne doivent pas s'étonner de ne recueillir aucun point.

– en n'indiquant pas le cheminement de leur pensée même dans les questions simples (mais qui ne sont simples que parce qu'elles ont été amenées par les questions précédentes) comme à la **question 7.b** où les correcteurs ont estimé qu'une réponse du style

$$w(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, x_n) = (-1)^{j-i-1} w(x_1, \cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$$

sans aucun autre commentaire si ce n'est « d'après **7.a** » ne convenait pas.

– enfin marginalement de mauvaises notations sont source d'erreurs grossières comme le symbole $\cdot$ pour le produit scalaire, malgré l'énoncé qui indiquait une autre notation.

Ainsi on a pu voir la triple confusion dans la **question 3** : $f(x) \cdot f(x) = f^2(x) = 0$ où le candidats prenait le $\cdot$ pour un produit (de fonctions) et le produit pour la composition ! Mais aussi des formules du type de $f(x|y) = (f(x)|f(y))$ qui sont peut-être des indices que pour certains candidats les formules se suffisent à elles-mêmes et les notations induisent les formules sans se poser la question du sens à accorder aux relations ainsi produites.

Statistique

- Notes éliminatoires : 15 soit 1,1 %
- Notes maximales : 7 soit 0,5 %

$0 \leqslant \mathrm{N} < 4$	6,1%
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	23,8%
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	39,3%
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	24,6%
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	6,1%

Analyse question par question

Première Partie

1* Un grand classique qui se démontre en une ligne ! Mais curieusement cette question n'a pas été réussie par plus de la moitié des candidats, dont beaucoup d'entre eux ont cherché à faire une récurrence improbable. Elle fait donc partie des quelques questions qui ont permis de faire la différence et qui sera indiquée par une astérisque.

2* Plein de méthodes ont été proposées pour cette question. Mais bien peu ont pu donner un résultat avec un signe correct.

3. Facile mais mérite une rédaction claire si les candidats veulent être distingués de ceux qui auront écrit par exemple « $(f(x)|f(y)) = 0$ donc $f(x) = 0$ ou $f(y) = 0$ donc $f = 0$. » ! !

4.a) Les équations fonctionnelles ont été peu utilisées : par exemple $f^2 = -Id$ donne directement que f est inversible, d'inverse $-f$ sans passer par le calcul du noyau.

4.b) Cette question a été bien vue par les candidats !

4.c*) Seule question ouverte du sujet qui a complètement déstabilisé les candidats qui en général se sont arrêtés un peu vite dans leur analyse. Par exemple, après avoir montré que cette question pouvait avoir des rapports avec les vecteurs propres, bien peu se sont mis en devoir de les trouver.

4.d) Facile si l'énoncé est correctement lu.

4.e*) Comme pour le sujet de l'an passé, la majorité des candidats ne maîtrise pas ce type de raisonnement pourtant très classique en algèbre linéaire, non pas tant parce que la récurrence n'est pas très bien présentée que par le fait que le cœur du raisonnement est souvent traité avec flou et désinvolture.

5.a) Question de cours !

5.b,c) Petits calculs faciles.

6.a) Cette question aurait pu être une question discriminante, du style de **4.c** mais plus difficile puisqu'il s'agissait finalement de rassembler toutes les informations glanées dans la première partie. Elle n'a quasiment jamais été traitée (sauf par une bouillie incompréhensible d'arguments inaboutis et qui tournent en rond), il est dommage que même de futurs polytechniciens ne puissent pas se mettre à ce niveau.

6.b*) Petit calcul matriciel que certains ont pu faire.

Deuxième partie

7.a) Un grand classique du cours sur les formes alternées.

7.b) Facile ; les candidats sont donc notés sur leur capacité à expliquer de manière concise comment ils procèdent.

7.c) On ne dira jamais assez qu'il est préférable de montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel si l'on veut éviter de se perdre dans la dizaine d'axiomes des espaces vectoriels.

7.d) Du cours ?

8.a) Facile.

8.b*) Finalement, de très nombreux candidats ont bien vu ce qu'il se passait quand $x_i = x_{i+1}$ pour $i \geq 2$. Par contre pratiquement personne ne s'est soucié du cas $i = 1$ et pourtant la formule donnant $\omega^{(p)}$ distingue le premier indice.

9. Facile.

10.a*) Facile également si l'on arrive la tête claire jusqu'ici. Mais cela ne concerne pas la moitié des candidats.

10.b) Un calcul simple à condition de bien comprendre comment $P(A)$ est défini.

10.c*) Comprendre que $P(A)$ s'exprimait par récurrence en fonction des éléments diagonaux de D montrait déjà une habileté certaine (en général les candidats ne maîtrisent pas plus ce type de questions que les raisonnements nécessaires aux question **4.e** ou **6.a**). Obtenir le signe correct pour α révèle les excellents candidats qui sont capables de tenir un calcul un peu long et un peu piègeux.

11.a) À priori facile et rédigeable en une demi-ligne. Que faut-il alors penser des candidats qui se lancent dans une page de calculs pour obtenir les coefficients matriciels du produit des trois matrices ?

11.b*) Cette question qui est loin d'être évidente a cependant permis à certains de montrer qu'ils avaient bien compris l'impact d'un changement de base sur le déterminant et sur ω_f ainsi que ses puissances.

12*) Beaucoup plus facile mais révélant néanmoins une vision globale du problème. Assez souvent traitée mais parfois avec trop de précipitation dans la rédaction.

13. Aucun candidat n'a réellement abordé cette question.

14* Facile si l'on n'oubliait pas de dire que $P(\mathcal{J})$ était non nul.

15.a,b) Les candidats n'ont rien gagné à ne parler que du déterminant. Il s'agissait de questions pas très faciles qui demandaient plus que les 5 dernières minutes pour être abordées.