

**ÉCOLE POLYTECHNIQUE**  
**ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES**

CONCOURS D'ADMISSION 2003

FILIÈRE **PC**

**DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES**

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\* \* \*

**Pfaffien d'une matrice antisymétrique**

Le but du problème est d'étudier une application définie sur les matrices antisymétriques réelles d'ordre pair, dont le carré est l'application déterminant.

Toutes les matrices considérées sont à coefficients *réels*. Une matrice d'ordre  $p$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ , est une matrice carrée à  $p$  lignes et  $p$  colonnes. On désigne par  $\text{id}_E$  l'application identité d'un espace vectoriel  $E$ , par  $I_p$  la matrice identité d'ordre  $p$  et par  $0_p$  la matrice nulle d'ordre  $p$ . On note  $\mathcal{A}_p$  l'espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre  $p$ .

**Première partie**

1. Montrer que si  $A$  est une matrice antisymétrique d'ordre impair,  $\text{Det} A = 0$ .

2. Soit  $D$  une matrice diagonale d'ordre  $m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ . Calculer en fonction des coefficients diagonaux de  $D$  le déterminant de la matrice d'ordre  $2m$ ,  $\begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix}$ .

Soit  $(E, (\mid))$  un espace vectoriel euclidien. Dans tout le problème  $f$  est un endomorphisme de  $E$  tel que

$$f^* = -f.$$

où  $f^*$  désigne l'adjoint de  $f$ .

3. On suppose que  $f^2 = 0$ . Montrer que  $f = 0$ .

4. On suppose que  $f^2 + \text{id}_E = 0$ .

a) Montrer que  $f$  est un automorphisme orthogonal de  $E$ .

b) Montrer que la dimension de  $E$  est paire.

c) Soit  $v \in E$ . À quelle condition les vecteurs  $v$  et  $f(v)$  sont-ils linéairement indépendants ?

d) Soit  $F$  l'orthogonal du sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $v$  et  $f(v)$ . Montrer que  $f(F) \subset F$ .

e) Soit  $n = 2m$ ,  $m \geq 1$ , la dimension de  $E$ . Montrer qu'il existe une famille  $(v_1, \dots, v_m)$  de vecteurs de  $E$  telle que  $(v_1, \dots, v_m, f(v_1), \dots, f(v_m))$  soit une base orthonormale de  $E$ . Quelle est la matrice de  $f$  dans cette base ?

5.a) Montrer que  $f^2$  est diagonalisable dans  $\mathbf{R}$ . On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  les valeurs propres distinctes de  $f^2$  et  $E_i$  l'espace propre correspondant à la valeur propre  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Montrer qu'on a une décomposition en somme directe orthogonale,

$$E = \bigoplus_{i=1}^k E_i.$$

b) Montrer que, pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq k$ ,  $\lambda_i \leq 0$ .

c) Montrer que, pour tout  $i$  tel que  $1 \leq i \leq k$ ,  $f(E_i) \subset E_i$ .

6.a) En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{A}_{2m}$ , il existe une matrice orthogonale  $Q$  d'ordre  $2m$  et une matrice diagonale  $D$  d'ordre  $m$  telles que

$$A = {}^t Q \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix} Q.$$

b) En déduire que pour toute matrice  $A \in \mathcal{A}_{2m}$ , il existe une matrice  $M$  d'ordre  $2m$  telle que  $A = {}^t M \mathcal{J}_{2m} M$ , où  $\mathcal{J}_{2m} = \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$ .

## Deuxième partie

Soit  $E$  un espace vectoriel réel et  $q$  un entier  $\geq 2$ . On appelle *forme  $q$ -linéaire alternée sur  $E$*  une application  $\omega : E^q \rightarrow \mathbf{R}$  satisfaisant les conditions suivantes :

(A) si  $x_1, \dots, x_q$  sont des vecteurs de  $E$  et s'il existe un entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq q-1$ , tel que  $x_i = x_{i+1}$ , alors

$$\omega(x_1, \dots, x_q) = 0;$$

en d'autres termes, l'application s'annule si deux arguments consécutifs sont égaux ;

(B) pour tout entier  $i$ ,  $1 \leq i \leq q$ , si  $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_q$  sont des vecteurs quelconques de  $E$ , l'application de  $E$  dans  $\mathbf{R}$  définie par  $x \mapsto \omega(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_q)$  est linéaire ; en d'autres termes, l'application  $\omega$  est linéaire par rapport à chaque variable.

On note  $\text{Alt}_q(E)$  l'ensemble des formes  $q$ -linéaires alternées sur  $E$ .

**7.a)** Soit  $\omega \in \text{Alt}_q(E)$ . Montrer que, pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq q-1$ , on a l'identité

$$\omega(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \dots, x_q) = -\omega(x_1, \dots, x_q),$$

pour tous  $x_1, \dots, x_q$  dans  $E$ ; en d'autres termes  $\omega$  change de signe si l'on permute deux arguments consécutifs.

**b)** Soit  $\omega \in \text{Alt}_q(E)$ . Montrer que s'il existe des entiers  $i$  et  $j$ ,  $i \neq j$ ,  $1 \leq i \leq q$ ,  $1 \leq j \leq q$ , tels que  $x_i = x_j$ , alors

$$\omega(x_1, \dots, x_q) = 0.$$

**c)** Montrer que, pour tout entier  $q \geq 2$ ,  $\text{Alt}_q(E)$  est un espace vectoriel réel.

**d)** On admet que si  $E$  est de dimension  $n$ , la dimension de  $\text{Alt}_n(E)$  est égale à 1. Donner une base de cet espace vectoriel.

Soit  $\omega \in \text{Alt}_2(E)$ . On définit une suite  $\omega^{(p)}$ ,  $p$  entier  $\geq 1$ , par la récurrence suivante :  $\omega^{(1)} = \omega$ , et si  $p \geq 2$ ,

$$\begin{aligned} \omega^{(p)}(x_1, \dots, x_{2p}) &= \omega(x_1, x_2) \omega^{(p-1)}(x_3, \dots, x_{2p}) \\ &+ \sum_{i=3}^{2p-1} (-1)^i \omega(x_1, x_i) \omega^{(p-1)}(x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{2p}) \\ &+ (-1)^{2p} \omega(x_1, x_{2p}) \omega^{(p-1)}(x_2, \dots, x_{2p-1}), \end{aligned}$$

pour tous  $x_1, \dots, x_{2p}$  dans  $E$ . Chaque  $\omega^{(p)}$  est donc une application de  $E^{2p}$  dans  $\mathbf{R}$ . On écrira en abrégé

$$\omega^{(p)}(x_1, \dots, x_{2p}) = \sum_{i=2}^{2p} (-1)^i \omega(x_1, x_i) \omega^{(p-1)}(x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{2p}).$$

**8.a)** Expliciter  $\omega^{(2)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  et montrer que  $\omega^{(2)} \in \text{Alt}_4(E)$ .

**b)** Montrer que, pour tout  $p \geq 3$ ,  $\omega^{(p)} \in \text{Alt}_{2p}(E)$ .

**9.** On suppose à nouveau que  $(E, (\cdot | \cdot))$  est un espace vectoriel euclidien et que  $f$  est un endomorphisme de  $E$  tel que  $f^* = -f$ . On pose, pour  $x_1 \in E$ ,  $x_2 \in E$ ,

$$\omega_f(x_1, x_2) = (x_1 | f(x_2)).$$

Montrer que  $\omega_f \in \text{Alt}_2(E)$ .

**10.** On suppose que  $E = \mathbf{R}^{2m}$  muni de la structure euclidienne canonique. Soit  $A$  une matrice antisymétrique d'ordre  $2m$  et soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbf{R}^{2m}$  associé à  $A$ . On reprend les notations des questions **8.** et **9.**

a) Montrer qu'il existe un nombre réel  $P(A)$  tel que

$$(\omega_f)^{(m)}(x_1, \dots, x_{2m}) = P(A) \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_{2m}),$$

pour tous  $x_1, \dots, x_{2m} \in E$ , où  $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}$  désigne le déterminant dans la base canonique de  $\mathbf{R}^{2m}$ . Le nombre  $P(A)$  est appelé *pfaffien* de  $A$ .

b) Calculer  $P(A)$  lorsque  $A \in \mathcal{A}_4$ , en fonction des coefficients  $a_{1,2}, a_{1,3}, a_{1,4}, a_{2,3}, a_{2,4}, a_{3,4}$  de  $A$ .

c) Lorsque  $A = \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix}$ , où  $D$  est une matrice diagonale d'ordre  $m$ , calculer  $P(A)$  en fonction des coefficients diagonaux de  $D$ , et déterminer un nombre réel  $\alpha$  indépendant de  $D$  tel que

$$P(A) = \alpha \operatorname{Det} D.$$

### Troisième partie

11. Soit  $A \in \mathcal{A}_{2m}$  et soit  $M$  une matrice d'ordre  $2m$ .

a) Montrer que  ${}^t M A M \in \mathcal{A}_{2m}$ .

b) Montrer que  $P({}^t M A M) = \operatorname{Det}(M) P(A)$ .

12. En utilisant le résultat de la question 6.a), montrer que, pour  $A \in \mathcal{A}_{2m}$ ,

$$(P(A))^2 = \operatorname{Det}(A).$$

13. Soit  $\Pi : \mathcal{A}_{2m} \rightarrow \mathbf{R}$  une application telle que  $\Pi({}^t M A M) = \operatorname{Det}(M) \Pi(A)$ , pour tout  $A \in \mathcal{A}_{2m}$  et pour toute matrice  $M$  d'ordre  $2m$ . Montrer qu'il existe un nombre réel  $\kappa$  tel que, pour tout  $A \in \mathcal{A}_{2m}$ ,  $\Pi(A) = \kappa P(A)$ .

14. Soit  $M$  une matrice d'ordre  $2m$  telle que  ${}^t M \mathcal{J}_{2m} M = \mathcal{J}_{2m}$ , où  $\mathcal{J}_{2m}$  est la matrice définie à la question 6.b). Montrer que  $\operatorname{Det}(M) = 1$ .

15.a) Soit  $B$  une matrice d'ordre  $m$  et soit  $A = \begin{pmatrix} 0_m & -{}^t B \\ B & 0_m \end{pmatrix}$ . Exprimer  $P(A)$  en fonction de  $\operatorname{Det}(B)$ .

b) Soient  $m_1$  et  $m_2$  des entiers  $\geq 1$ ,  $A_1 \in \mathcal{A}_{2m_1}$ ,  $A_2 \in \mathcal{A}_{2m_2}$ , et soit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{2m_1, 2m_2} \\ 0_{2m_2, 2m_1} & A_2 \end{pmatrix},$$

où  $0_{m,m'}$  désigne la matrice nulle à  $m$  lignes et  $m'$  colonnes. Exprimer  $P(A)$  en fonction de  $P(A_1)$  et de  $P(A_2)$ .