Composition de Mathématiques 2, Filière MP

Rapport de MM. Pierre-Vincent KOSELEFF et Jean-Luc SAUVAGEOT, correcteurs.

Cette épreuve a été plutôt réussie dans l'ensemble dans la mesure où quelques questions d'algèbre linéaire élémentaire permettait à l'immense majorité des candidats d'avancer dans le sujet.

La moyenne générale est 9,81, et une dizaine de candidats a obtenu la note 20.

$0 \leqslant N < 4$	73	4,8 %
$4 \leqslant N < 8$	390	25,6 %
$8 \leqslant N < 12$	661	43,4 %
$12 \leqslant N < 16$	315	20,7 %
$16 \leqslant N \leqslant 20$	85	5,6 %
Total	1524	100 %
Nombre de copies : 1524		
Note moyenne : 9,81		
Écart-type : 3,59		

Comme les années précédentes, nous ne pouvons que constater en général une certaine désinvolture dans la rédaction, voire une absence de rédaction. En général, une majorité de candidats ne prend pas la peine de justifier, ne fût-ce qu'en deux mots, soit un passage d'une ligne de calcul à la suivante, soit une affirmation qui découle d'une question précédente ou d'une hypothèse de l'énoncé, sans s'y référer explicitement.

Ceci peut expliquer des notes moyennes pour des candidats qui ont traité un grand nombre de questions mais dont les démonstrations étaient incomplètes.

Examen détaillé des questions.

1.a. Avec cette toute première question commencent les ennuis. Neuf candidats sur dix sont incapables de discerner, entre les deux valeurs possibles de μ_λ, laquelle est en valeur absolue supérieure à 1. Plus grave peut-être, seul un candidat sur trois invoque le polynôme caractéristique, et encore ne remarque-t-il pas toujours que ses deux racines sont inverses l'une de l'autre. Le reste des copies pose un système d'équations à partir des données de l'énoncé, puis le résout par conditions nécessaires (sans prendre souvent la peine de vérifier qu'elles sont suffisantes). De sorte que l'apparition de μ_λ^{-1} comme seconde valeur propre relève d'un acte de confiance.

1.b. Si la valeur de μ_λ ne pose guère de problème, la seconde valeur propre est trop souvent proposée sous la forme $\dfrac{2}{\lambda + i\sqrt{4-\lambda^2}}$.

1.c.d. Question facile, dont le résultat est souvent donné sans la moindre justification.

2.a. La récurrence ascendante est en général bien posée. Les k négatifs sont souvent oubliés, et/ou la réciproque escamotée.

2.b. La dimension du noyau est devinée, et plus souvent mal que bien justifiée.

3.a.b.c. Ceux qui ont suivi la méthode suggérée par l'énoncé s'en sortent plutôt bien, sinon qu'un certain nombre oublient d'invoquer la forme particulière des vecteurs $f_{\lambda,1}$ et $f_{\lambda,2}$. Ceux qui ont opté pour un raisonnement par récurrence ne notent pas toujours que cette récurrence porte sur deux indices, et oublient plus souvent encore qu'elle porte sur un k dans $\mathbf{Z}$ et non dans $\mathbf{N}$. Encore de trop nombreux candidats ne démontrent rien et assènent un « par une récurrence élémentaire » ou « triviale » ce qui doit être proscrit, lorsque la réponse est fournie dans la question.

4.a. Un candidat sur deux divise allègrement par $1 - \mu_\lambda^N$ et passe ainsi à côté de la question. De façon plus étrange, beaucoup affirment que $|\mu_\lambda| > 1$, oubliant ce qu'ils ont démontré en 1.b. On retrouvera cette erreur à la question 8.

4.b.c. Le résultat est souvent deviné, pas toujours correctement démontré. Beaucoup proposent une base dans $\mathbf{C}^2$, et non dans E.

5. Cette première question d'analyse en dimension infinie a dérouté les candidats. La plupart connaissent le résultat selon lequel une application linéaire entre deux espaces normés est continue si et seulement si elle est bornée sur la boule unité, mais ils ne l'invoquent pas toujours explicitement. Quant au calcul exact des deux normes, il soulève d'évidentes difficultés.

6.a. Une question qui ressemblait à la précédente, en plus facile et donc mieux réussie.

6.b. On a l'impression que les candidats disposent des outils pour résoudre cette question, sans trop savoir les mettre en œuvre. Ils voudraient passer par l'absolue convergence, que ce soit celle de la série $\sum_n \lambda^{-n} A^n(x)_k$ dans $\mathbf{C}$, ou directement celle de la série $\sum_n \lambda^{-n} A^n$ dans $\mathcal{L}(E_1)$, mais ils l'écrivent trop souvent sous une forme

$$|\sum_n \lambda^{-n} A^n(x)_k| \leq \sum_n |\lambda^{-n} A^n(x)_k| \leq ... < +\infty$$

qui présuppose l'existence de la somme pour mieux la démontrer. Du moins, lorsqu'on ne lit pas « *les sommes partielles sont bornées, donc la série converge* ».

La forme de l'inverse est devinée par un quart des candidats, et ensuite plus ou moins bien justifiée. La plupart oublient la vérification, pourtant facile, du fait que l'inverse à droite est aussi un inverse à gauche, ou vice versa.

7.a.b. Bien traitées par plus de 80% des candidats.

8.a.b. La fatigue se faisant déjà sentir, ces questions se soldent par un désastre. En 8.a., le cas facile $|\lambda| = 2$ est soldé par deux mots (*divergence grossière*) ou trois mots (*la série diverge*), sans plus d'explications. Le cas $|\lambda| > 2$ est bien traité par les quelques candidats qui invoquent 6.b. Les autres, là encore, affirment la divergence sans l'expliquer, ou bien au contraire oublient la possibilité d'une divergence quand $k \to -\infty$ et exhibent un noyau non trivial. Quant au cas $|\lambda| < 2$, il est soit escamoté (« puisque $|\mu_\lambda|$ est toujours > 1 »), soit simplement esquissé, si l'on excepte les quelques rares élus qui ont su proposer une preuve complète.

En 8.b., les résultats du cas $|\lambda| = 2$ sont correctement devinés, et à peine justifiés. La cas $|\lambda| < 2$ ne pose pas non plus de problème lorsqu'il n'est pas oublié. Le cas $|\lambda| > 2$ est la plupart du temps maltraité. Les plus malins font remarquer que les résultats du 6.b. peuvent s'étendre à E_∞. Cinq ou six candidats pensent à invoquer le calcul de la norme de A_∞ fait en 6.a.

9. Rarement traitée. Quelques uns pensent à traiter le cas facile $|\lambda| > 2$, réglé par l'inversibilité de B_λ en 6.b. Seuls une dizaine de candidats ont proposé une démonstration complète.

10. Plutôt bien traitée. Presque tous devinent qu'il s'agit d'intervertir série et intégrale, et ils le justifient plus ou moins bien.

11. Sans problème, si l'on fait abstraction des nombreuses fautes de calcul, dues sans doute à l'épuisement.

12. Une question difficile à ce stade de fatigue. Fautes de calcul et raisonnements incomplets ou peu convaincants s'accumulent.

13. Rarement abordée, et plus rarement encore réussie. Ici encore, on divise allègrement par $\lambda - 2\cos t$.