

## Composition de Mathématiques 2, Filière MP

**Rapport de MM. Pierre-Vincent Koseleff et Jean-Luc SAUVAGEOT, correcteurs.**

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leq N < 4$	103	7 %
$4 \leq N < 8$	575	39,1%
$8 \leq N < 12$	440	29,9%
$12 \leq N < 16$	244	16,6%
$16 \leq N \leq 20$	109	7,4%
Total	1471	100 %
Nombre de copies :	1471	
Note moyenne :	9,11	
Écart-type :	4,04	

Cette épreuve a été plutôt réussie dans l'ensemble, dans la mesure du moins où les questions de pur calcul, parfois ingrat, ont permis de compenser des lacunes certaines en algèbre linéaire. La moyenne générale est supérieure à 9, et une petite dizaine de candidats a obtenu la note 20.

On notera en général une certaine désinvolture dans la rédaction, et une bonne part d'implicite imprudemment laissée à l'appréciation des correcteurs. En général, une majorité de candidats ne prend pas la peine de justifier, ne fût-ce qu'en deux mots, soit un passage d'une ligne de calcul à la suivante, soit une affirmation qui découle d'une question précédente ou d'une hypothèse de l'énoncé, sans s'y référer explicitement, soit d'un exercice traité en classe et dont les résultats sont supposés admis.

Parmi les erreurs récurrentes, notons d'abord la confusion classique, de plus en plus fréquente, entre l'espace vide et l'espace réduit à  $\{0\}$ . Dans le même ordre d'idée, la conviction qu'une famille de vecteurs deux à deux non proportionnels est une famille libre, ou qu'une famille d'espaces deux à deux d'intersection nulle (ce qu'ils appellent des *espaces deux à deux disjoints*) est en somme directe.

On lit trop souvent que tous les endomorphismes sont diagonalisables, ou, plus subtilement, que l'espace entier est la somme des espaces propres.

Un autre problème est celui de la division par zéro, c'est à dire de la simplification par un facteur multiplicatif en omettant de vérifier qu'il n'est pas nul.

Enfin, pour anticiper sur la question **4.b**, un petit tiers des candidats affirme sans état d'âme qu'un endomorphisme diagonal laisse stables **tous** les sous-espaces de l'espace vectoriel ambiant.

Passons à l'examen détaillé des questions.

**1.** Bien traitée dans l'ensemble, sinon que nombre de candidats ne jugent pas utile de justifier que, lorsque deux endomorphismes commutent, chacun laisse stable les sous-espaces propres de l'autre.

**2.a.** Même remarque qu'en **1**. Beaucoup ne prennent pas la peine de justifier l'existence d'un espace propre. Un nombre important de candidats affirme que si  $A$  et  $B$  commutent,  $A$  laisse stables les espaces stables de  $B$ . Ce qui est manifestement faux lorsque, par exemple,  $B$  est l'identité.

**2.b.** Cette question est omise par plus de la moitié des candidats. Un tout petit nombre propose un contre-exemple convaincant. Il semble qu'une majorité de candidats a été simplement incapable d'énoncer correctement cette fameuse réciproque, ce qui conduit à des assertions du type : *Les multiples de l'identité commutant à tous les endomorphismes, la réciproque est fausse* (variante : *la réciproque est vraie*). Notons qu'aucun candidat n'a essayé les matrices  $K$  et  $E$  fournies à la question **12** qui constituaient un parfait contre-exemple.

**3.** Traitée sans difficulté notable, parfois avec beaucoup de laisser-aller.

**4.a** Les correcteurs ont eu la surprise de voir le résultat deviné dans plus de la moitié des copies. Au fil des explications – car on en trouve tout de même de temps en temps – ils ont compris que les candidats estimaient que tout sous-espace de  $X$  possédait une base extraite de la base  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de l'énoncé.

**4.b.** Parmi les rédactions les plus courantes :

*Les sous-espaces trouvés en 4.a sont stables par  $K_0$  (sans explication).*

*Les sous-espaces trouvés en 4.a sont stables par  $K_0$  parce que  $K_0$  est diagonal (resp. laisse stable les droites de direction  $x_i$ ,  $i = 1..n$ ).*

*Les sous-espaces trouvés en 4.a sont stables par  $K_0$  parce que  $K_0$  est diagonal, et par conséquent laisse stables tous les sous-espaces vectoriels de  $X$ .*

Notons également que certains candidats confondent espaces propres et espaces stables.

**5.** Bien traitée par plus de 90% des candidats.

**6.** Cette question a été largement abordée et plutôt réussie en guise de rattrapage, mais parfois traitée paresseusement, en omettant de poursuivre les calculs jusqu'au bout puisqu'on pouvait faire confiance à l'énoncé, ou en jugeant inutile de tester la relation sur le premier et le dernier vecteur de la base.

**7.** À l'image de la question **4.a**, la plupart des candidats devinrent la forme des sous-espaces stables de  $E_0$ . Très peu pensent à tester la stabilité par  $E_0$  des sous-espaces stables de  $F_0$  énumérés en **4.a**.

**8.** Traitée sans problème par la quasi-totalité des candidats.

**9.** Dans beaucoup de copies, on rencontre une innovation majeure en algèbre : la multiplication **à droite** d'un vecteur par un opérateur. Ce qui donne à peu près la chaîne :

$$AKx = Ky \Rightarrow AKK^{-1}x = KK^{-1}y \Rightarrow Ax = y$$

(notons que l'égalité intermédiaire est souvent omise comme allant de soi).

**10.** Sans difficulté pour les candidats qui ont choisi de passer par le théorème de Cayley-Hamilton, sinon une certaine confusion entre le *polynôme caractéristique* et le *polynôme minimal*, du moins quand l'un ou l'autre n'est pas nommé *polynôme annulateur*. Il convenait également de mentionner que ces polynômes étaient scindés. D'autres choisissent de trianguler l'endomorphisme  $E$ , et concluent sans trop entrer dans les détails. Enfin, une grande part affirme sans explication, que  $E$  étant nilpotente,  $E^n = 0$ , ce qui était justement l'objet de la question.

Notons que deux ou trois candidats ont choisi d'inverser l'ordre des questions et de traiter d'abord la question **10** (dont la **9** est alors un corollaire évident), en considérant que les  $E^m$  non nuls ( $m \in \mathbf{N}$ ) sont des vecteurs propres de l'endomorphisme  $A \rightarrow K^{-1}AK$  de  $\mathcal{L}(X)$  (espace de dimension finie) pour des valeurs propres deux à deux distinctes.

**11.** L'une des méthodes consistait à considérer un vecteur propre quelconque de  $K$ , et à lui appliquer  $E$  autant de fois que nécessaire. On pouvait aussi considérer la restriction de  $K$  au noyau de  $E$ , à condition de préciser que cet espace n'était pas réduit à  $\{0\}$ .

**12.a.b.c.d.** Une occasion de regagner quelques-uns des points perdus dans les questions précédentes. Ces questions faciles ont été jugées en partie sur la qualité de leur rédaction.

**13.** Ce calcul a souvent rebuté des candidats qui commencent à ressentir la fatigue.

**14. 15.** Ces deux questions sont en général traitées sans trop de problème par ceux qui les abordent, mais la rédaction en est trop souvent négligée.

**16.a.** Cette question a semblé difficile. Très peu pensent à appliquer le résultat de la question **14**. Certains invoquent la nilpotence de l'opérateur  $F$ , non explicitement prouvée mais qui pouvait se déduire des questions **9** et **10**. D'autres cherchent à utiliser la question **15**, le plus souvent sans s'apercevoir que le coefficient de proportionnalité entre  $E\nu_m$  et

$\nu_{m-1}$  pouvait s'annuler (ce qui constituait pourtant l'essence de la question **16.d**).

**16.b.** Cette question très simple est traitée de façon souvent maladroite.

**16.c.** Effet de la fatigue sans doute, seule une poignée de candidat pense à invoquer l'irréductibilité du triplet  $(K, E, F)$ .

**16.d.** Sans difficulté majeure, sinon là encore un peu de désinvolture dans les simplifications.

**17.** Cette dernière question, lorsqu'elle est abordée, l'est de façon étonnamment succincte.