Composition de Mathématiques 2, Filière MP

Rapport de MM. Vincent COSSART et Jean-Luc SAUVAGEOT, correcteurs.

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant \mathrm{N} < 4$	235	16,8%
$4 \leqslant \mathrm{N} < 8$	591	42,3%
$8 \leqslant \mathrm{N} < 12$	377	27,0%
$12 \leqslant \mathrm{N} < 16$	141	10,1%
$16 \leqslant \mathrm{N} \leqslant 20$	54	3,9%
Total	1398	100 %
Nombre de copies : 1398		
Note moyenne 7,58		
Écart-type : 3,96		

Ce problème proposait un tout petit nombre de questions difficiles, que seule une poignée de candidats a abordées, quelques questions un peu moins difficiles, où s'est jouée la sélection entre les meilleures notes et les autres, et enfin des questions faciles ou de difficulté standard qui ont été abordées par la majorité des candidats comme autant d'obstacles sévères.

Parmi les points positifs, notons une certaine autocensure des candidats, qui hésitent davantage à proposer aux correcteurs des raisonnements incomplets ou fallacieux ; ou encore une moindre tendance à poser des récurrences là où elles n'ont rien à faire. En revanche, la virtuosité en algèbre linéaire, naguère l'apanage des élèves de classe préparatoire, tend à disparaître. De façon plus inquiétante, on constate un flottement certain dans le maniement des nombres complexes et des structures hermitiennes : oubli fréquent de la conjugaison sur l'un des deux termes dans le produit scalaire de $\mathbf{C}^N$, manque de maîtrise des racines de l'unité, etc. Et ce, jusqu'aux propriétés élémentaires des fonctions trigonométriques : l'équation $\cos a = \cos b$ a semblé poser des problèmes insurmontables.

Passons à l'examen détaillé des questions :

1.a. Avec cette première question les ennuis commencent. Outre l'erreur désormais classique

$$\forall x \ \exists \lambda \ \ Ax = \lambda\, x$$

il y a un certain flottement sur le choix de la norme. Les candidats savent qu'une matrice réelle symétrique est diagonalisable en base orthonormée, mais l'exploitent avec la norme ℓ^1 qui n'est invariante par changement de base orthonormée. Cette erreur se répare souvent à la question suivante. Les correcteurs sidérés ont lu plusieurs fois « toutes les normes sont équivalentes, donc égales ».

1.b.c. Une confusion fréquente entre $\max \lambda$ et $\max |\lambda|$ leur fait invoquer Cauchy-Schwarz pour 1.b et, pour 1.c, la réciproque de Cauchy-Schwarz qui ne donnait pas davantage le résultat.

2. La notion de rang d'une matrice n'apparaît plus spontanément dans la boite à outils des candidats. Beaucoup tentent une résolution manuelle du système, et quelques-uns s'en sortent. Notons l'invocation de la formule magique : « polynôme scindé à racines simples » (sans preuve).

3.a.b. La plupart des candidats ont glané des points faciles.

3.c. Erreur fréquente : $\det -A_N = -\det A_N$, avec sa variante $\det -A_N = \det A_N$.

3.d. Un certain nombre de candidats confond la parité du polynôme avec celle de son degré. D'autres, remarquant que P_1 était pair et P_2 impair, en déduisent que le polynôme P_N n'est ni pair ni impair.

4. En général bien traitée, sinon que la rédaction ne fait pas trop la différence entre récurrence simple ou double.

5.a. L'inégalité $4||x||^2 - ||A_N x||^2 \geq 0$, $\forall x$, est souvent bien démontrée. L'inégalité stricte et le passage à la borne supérieure se traitent de façon plus hasardeuse.

L'inégalité $||A_N|| \geq 4 - \dfrac{6}{N}$ suscite moins d'erreur, dans la mesure où, grosso modo, elle n'est rédigée que par ceux qui ont trouvé la solution.

5.b. Beaucoup d'erreurs par manque de rigueur : confusion d'espaces, confusion entre vecteurs de $\mathbf{C}^N$ et de $\mathbf{C}^{N-1}$, les matrices A_N et A_{N-1} agissant indifféremment sur les uns ou les autres. Ou encore on passe de $(x_1, \ldots, x_{N-1})$ à $(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N)$ avec un $x_N \neq 0$, sans s'apercevoir que la condition $||x|| \leq 1$ n'est plus vérifiée. Pour ceux qui s'en tiennent à $x_N = 0$, le passage de l'inégalité large à l'inégalité stricte pose pas mal de problèmes.

Il y a encore ceux qui essaient de déduire 5.b de 5.a, et ceux qui veulent calculer explicitement les racines. Cette dernière voie, un peu malaisée, a conduit un tout petit nombre de candidats au résultat. En fait, la relation de récurrence 3.b permettait un calcul explicite des polynômes P_N, qui résolvait pas mal de questions s'il était fait sans erreur.

6. Cette question a été peu abordée et encore moins réussie. Beaucoup de vérifications oubliées, par exemple que $\lambda_N = ||A_N||$ (i.e. $\max |\lambda| = \max \lambda$), ou que l'on s'appuie sur un x tel que $x_1 \neq 0$.

7.a. Tous les candidats ou presque, dont beaucoup ont sauté les questions 5 et 6, se lancent avec soulagement dans les calculs de cette question. La moitié les mène à bout.

7.b.c. Un désastre. Ces deux questions élémentaires ont été réussies par moins d'un candidat sur dix. Il leur est presque impossible de savoir quand deux racines de l'unité sont distinctes. Presque tous affirment que les valeurs propres trouvées en 7.a (les $2\cos\dfrac{2k\pi}{N}$, $k = 0 \ldots N-1$) sont distinctes, donc de multiplicité 1. D'où ils déduisent que la famille de vecteurs propres de 7.a est automatiquement orthogonale.

Ceux qui n'ont pas fait cette erreur en déduisent que toutes les valeurs propres sont de multiplicité 2 oubliant presque tous les cas particuliers $\lambda = 2$ ou éventuellement $\lambda = -2$ (ce qui n'est pas vraiment dans l'esprit du problème), et vérifient l'orthogonalité de la base en oubliant que le produit scalaire hermitien n'est pas bilinéaire mais sesquilinéaire. Quelques-uns ont l'honnêteté de trouver leur démonstration boiteuse, sans savoir pourquoi.

8.a. La moitié des candidats traitant l'inversibilité de Φ s'en sort. L'autre moitié invoque, sans preuve, un incantatoire « système de Cramer ». Le calcul de l'inverse est difficile.

8.b. Calcul difficile pour beaucoup de candidats. Trop d'entre eux trouvent pour Ω un multiple de l'identité.

8.c. Question traitée à peu près correctement par ceux qui l'ont abordée.

9. On lit trop souvent l'affirmation $\sum_k a_{ik}|x_k| = \sum_k a_{ik}x_k$, qui simplifiait abusivement les choses.

10.a. Encore une question que les candidats ont trouvée difficile. Ceux qui ont l'intuition de la preuve ont du mal à la rédiger de façon convaincante.

10.b. Beaucoup d'erreurs de calculs, puis d'erreurs de raisonnement dans le maniement des infiniment petits.

10.c et 11. Il n'y avait là presque plus rien à démontrer : il suffisait d'un peu de logique, de lucidité et d'admettre les questions précédentes. Malheureusement, la rédaction n'a pas toujours convaincu les correcteurs.