

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2000

FILIÈRE **PC**

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On se propose d'étudier une famille de polynômes (polynômes de Krawtchouk) et une famille de matrices (matrices d'adjacence du schéma d'association de Hamming) dont les propriétés sont liées, et applicables à la théorie des codes détecteurs et correcteurs d'erreurs dans la transmission de l'information. (Ces applications ne sont pas abordées dans le problème.)

Les deux premières parties sont indépendantes.

Dans tout le problème, N désigne un entier naturel non nul.

On prend par convention $0! = 1$. Si n et k sont des entiers naturels, on pose

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Première partie

1. Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, on définit le polynôme φ_k de la variable X par

$$\varphi_k(X) = \begin{cases} \frac{1}{k!} \prod_{0 \leq i \leq k-1} (X - i) & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 . \end{cases}$$

Évaluer $\varphi_k(j)$ pour chaque entier naturel j .

2. Pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq N$, on définit le polynôme P_n de la variable X par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \varphi_k(X) \varphi_{n-k}(N-X) .$$

a) Calculer P_0 , P_1 et P_2 .

b) Calculer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_n .

c) Montrer que, pour chaque entier j tel que $0 \leq j \leq N$,

$$P_n(j) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{j}{k} \binom{N-j}{n-k} .$$

3. Pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq N$, on considère la fonction f_j de la variable réelle u , définie par

$$f_j(u) = \sum_{n=0}^N P_n(j) u^n .$$

Montrer que $f_j(u) = (1-u)^j (1+u)^{N-j}$.

4. On considère la fonction F de deux variables réelles u et v , définie par

$$F(u, v) = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} f_j(u) f_j(v) .$$

a) Montrer que $F(u, v) = \alpha(1+uv)^\beta$, où α et β sont des constantes que l'on déterminera.

b) Soient a et b des entiers, $0 \leq a \leq N$, $0 \leq b \leq N$. Montrer que si $a \neq b$:

$$\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(0, 0) = 0 .$$

Évaluer $\frac{\partial^{2a} F}{\partial u^a \partial v^a}(0, 0)$ en fonction de a et de N .

5. On note $\mathbf{R}_N[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à N . Pour $P, Q \in \mathbf{R}_N[X]$, on pose

$$\langle P|Q \rangle = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} P(j) Q(j) .$$

a) Montrer que $\langle | \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_N[X]$.

b) Montrer que $(P_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une base orthogonale de $\mathbf{R}_N[X]$ muni de ce produit scalaire.

6. Montrer que, pour tout entier m tel que $1 \leq m \leq N-1$,

$$(m+1)P_{m+1}(X) - (N-2X)P_m(X) + (N-m+1)P_{m-1}(X) = 0 .$$

[On calculera de deux manières différentes le coefficient de u^m dans $(1-u^2)\frac{df_j(u)}{du}$.]

Deuxième partie

On pose $E = \{1, 2, \dots, N\}$ et l'on désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Pour chaque partie I de E , on note $\text{Card } I$ le cardinal de I . Si I et J sont des parties de E , on pose

$$d(I, J) = \text{Card}(I \triangle J) ,$$

où $I \triangle J$ est l'ensemble des points de la réunion $I \cup J$ qui n'appartiennent pas à l'intersection $I \cap J$.

7.a) À quelle condition a-t-on $d(I, J) = 0$? À quelle condition a-t-on $d(I, J) = 1$?

b) Montrer que $d(I \triangle J, I) = \text{Card } J$.

8. Soient I et J deux parties de E . On pose $d(I, J) = k$. Calculer le nombre γ_j^k de parties A de E telles que $d(I, A) = 1$ et $d(J, A) = j$.

Troisième partie

On utilise dans cette partie les notations et les résultats des deux premières parties.

On suppose $\mathcal{P}(E)$ muni d'un ordre total $\preceq$. On a donc $\mathcal{P}(E) = \{I_1, I_2, \dots, I_{2^N}\}$ où $I_1 \preceq I_2 \preceq \dots \preceq I_{2^N}$.

Pour tout entier naturel n , on définit une matrice carrée réelle à 2^N lignes

$$A_n = ((A_n)_{pq})_{\substack{1 \leq p \leq 2^N \\ 1 \leq q \leq 2^N}} \quad \text{par} \\ (A_n)_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } d(I_p, I_q) = n \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

On note $\mathcal{I}$ la matrice identité à 2^N lignes.

9.a) Que vaut A_n pour $n > N$? Expliciter A_0 .

b) Montrer que pour tout entier m tel que $1 \leq m \leq N-1$,

$$A_1 A_m = (N-m+1)A_{m-1} + (m+1)A_{m+1} .$$

10. On pose $A = \frac{1}{2}(N\mathcal{J} - A_1)$. Montrer par récurrence sur n que, pour tout entier n tel que $0 \leq n \leq N$,

$$A_n = P_n(A) ,$$

où les polynômes P_n sont ceux définis et étudiés dans la première partie.

11. Soit i un entier tel que $0 \leq i \leq N$. Montrer que, si $I \in \mathcal{P}(E)$ est tel que $\text{Card } I = i$, alors pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq N$,

$$P_j(i) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J = j}} (-1)^{\text{Card}(I \cap J)} .$$

12.a) Soient $I, J, K \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$(-1)^{\text{Card}((I \Delta J) \cap K)} = (-1)^{\text{Card}(I \cap K)} (-1)^{\text{Card}(J \cap K)} .$$

b) Soient $I, J \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que

$$\sum_{K \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{\text{Card}(I \cap K)} (-1)^{\text{Card}(J \cap K)} = \begin{cases} 2^N & \text{si } I = J \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

13. Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq N$, on pose

$$B_k = \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N P_k(n) A_n .$$

a) Montrer que

$$\begin{cases} (B_k)^2 = B_k \\ B_k B_\ell = 0 \quad \text{si } \ell \neq k . \end{cases}$$

[On pourra utiliser les résultats des questions **11.** et **12.**].

b) Déterminer la trace et le rang de chaque matrice B_k .

14.a) Pour chaque entier n tel que $0 \leq n \leq N$, trouver les valeurs propres de la matrice A_n .

b) Déterminer la dimension des sous-espaces propres de la matrice A_1 .

* *

*