

Banque commune **École Polytechnique – ENS de Cachan**
PSI
Session 2013

Épreuve de Physique

Durée : **4 heures**

Aucun document n'est autorisé

Aucune calculatrice autorisée

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étude de Micro-systèmes électrostatiques et optiques

Le sujet traite de la physique de micro-systèmes électromécaniques et optiques à travers l'étude plus spécifique de deux composants : un micro-accéléromètre et un micro-réseau optique modulable.

Le problème est composé de trois parties qui peuvent être traitées de manière totalement indépendantes. Dans chaque partie, les sections sont en partie indépendantes les unes des autres.

Première partie

Micro-systèmes électrostatiques

Dans cette partie, on s'intéresse aux phénomènes électrostatiques mis en jeu entre des micro-structures conductrices.

1 - Énergie électrostatique

Dans un premier temps, on cherche à établir l'expression de l'énergie électrostatique pour une distribution continue surfacique de charge.

On considère deux charges ponctuelles q_1 et q_2 , isolées dans le vide, situées en deux points P_1 et P_2 séparés d'une distance r_{12} (cf. figure 1). On note V_1 (resp. V_2) le potentiel électrostatique produit par q_2 (resp. q_1) en P_1 (resp. P_2).

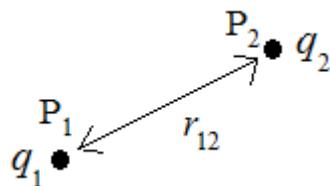


Figure 1.

- 1) En s'appuyant sur le travail des forces électrostatiques mises en jeu, déterminer l'expression de l'énergie électrostatique E_e de ce système à deux charges (E_e est aussi appelée énergie potentielle d'interaction entre les deux charges). On supposera E_e nulle lorsque les charges sont très éloignées et on exprimera E_e en fonction de q_1 , q_2 , r_{12} et ϵ_0 .
- 2) Exprimer E_e en fonction de q_1 et V_1 puis en fonction de q_1 , q_2 , V_1 et V_2 .
- 3) Montrer que pour un système de N charges q_1, \dots, q_N , soumises respectivement aux potentiels V_1, \dots, V_N , l'énergie électrostatique peut s'écrire sous la forme :

$$E_e = \lambda \sum_{i=1}^{i=N} q_i V_i$$
. Déterminer la valeur de λ . Pour le calcul on notera r_{ij} la distance séparant la charge q_i de la charge q_j .
- 4) En déduire l'expression sous forme intégrale de E_e pour un conducteur (C), isolé, possédant une distribution continue surfacique de densité de surface $\sigma(M)$ et une distribution de potentiel $V(M)$. On notera dS l'élément de surface autour d'un point M quelconque du conducteur (cf. figure 2).

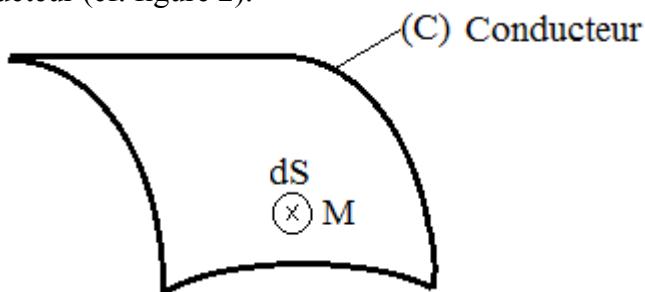


Figure 2.

- 5) Que devient l'expression de E_e lorsque le potentiel V est constant sur l'ensemble de la distribution de charge ? On notera Q la charge totale du conducteur et on exprimera E_e en fonction de Q et V .

2 – Système electrostatique à 3 micro-électrodes

On s'intéresse maintenant aux phénomènes électrostatiques dans le système constitué des trois électrodes planes parfaitement conductrices (1), (2) et (3) (cf. figure 3).

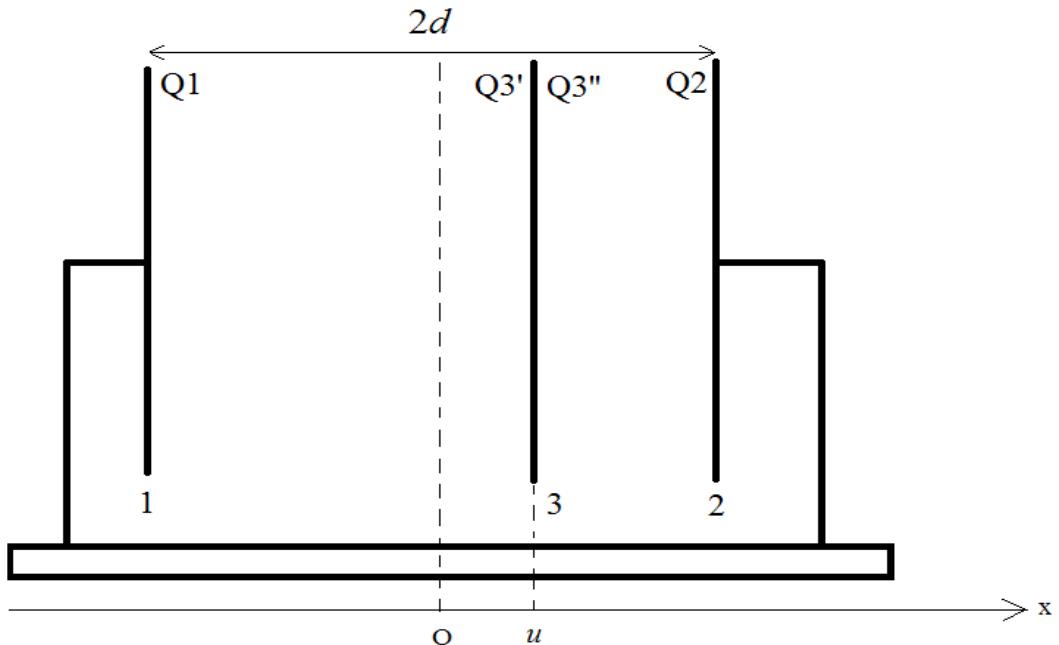


Figure 3.

On note C_{13} la capacité du condensateur constitué des électrodes (1) et (3), et C_{23} celle du condensateur constitué des armatures (2) et (3).

On supposera les 2 condensateurs parfaitement plans (en influence totale et sans effets de bords) .

On note A la surface des 3 électrodes. Le milieu entre les électrodes est supposé parfaitement isolant, assimilable à du vide de constante diélectrique ϵ_0 .

Les électrodes (1) et (2) distantes de $2d$ sont fixes. L'électrode (3) est mobile uniquement selon l'axe Ox, repérée par son abscisse u . On considérera l'épaisseur de l'électrode (3) toujours négligeable devant $|u|$. L'origine O est équidistante des électrodes (1) et (2). On notera \vec{e}_x le vecteur unitaire porté par Ox.

2a – Cas où l'électrode (3) est isolée électriquement : micro-capteur

On suppose qu'initialement le système n'est constitué que des électrodes (1) et (2) de potentiels électrostatiques respectifs V_1 et V_2 imposés par deux générateurs de tension continue et portant respectivement les charges $Q_1=+Q$ et $Q_2=-Q$, uniformément réparties en surface.

On introduit par la suite l'électrode (3), initialement non chargée, à l'abscisse u .

Soumise à une force extérieure au système, cette électrode se déplace uniquement selon l'axe Ox tout en restant constamment isolée électriquement.

On note V_3 le potentiel de l'électrode (3).

- 6) En vous appuyant sur le théorème de Gauss, déterminer les valeurs des charges $Q_{3'}$ et $Q_{3''}$ sur chacune des faces de l'électrode (3).
- 7) De la même manière, déterminer l'expression du champ électrique $\vec{\xi}$ entre les électrodes (1) et (3). On exprimera $\vec{\xi}$ en fonction de Q , A , ϵ_0 et \vec{e}_x .
- 8) En déduire l'expression de la différence de potentiel $V_1 - V_3$ en fonction de Q , A , ϵ_0 , d et u .
- 9) Déterminer l'expression de C_{13} en fonction de Q , V_1 et V_3 , puis de A , d , u et ϵ_0 . Par analogie, donner l'expression de C_{23} .
- 10) Déterminer les expressions des énergies potentielles électrostatiques E_{13} et E_{23} stockées respectivement dans les condensateurs C_{13} et C_{23} , en fonction de Q , C_{13} et C_{23} , puis de Q , A , u , d et ϵ_0 .
- 11) A partir des énergies potentielles calculées précédemment, déterminer en fonction de Q , A et \vec{e}_x , les expressions de \vec{f}_{13} et \vec{f}_{23} , forces électrostatiques s'exerçant sur l'électrode (3) dues respectivement à l'électrode (1) et à l'électrode (2).
- 12) Conclure sur la force électrostatique résultante s'exerçant sur l'électrode (3). Pouvait-on prévoir qualitativement ce résultat ? (justifier succinctement)
- 13) Déterminer l'expression de V_3 en fonction de u , V_1 , V_2 et d .

2b – Cas où le potentiel sur l'électrode (3) est maintenu constant : micro-actionneur

On considère maintenant le système de la figure 4 dans lequel l'électrode (3) est rendue solidaire de l'électrode (1) via un ressort de raideur k . Un générateur de tension impose entre les électrodes (2) et (3) une différence de potentiel V et les électrodes (1) et (3) sont en court-circuit (au même potentiel).

On supposera que la longueur à vide du ressort est égale à d .

- 14) Déterminer l'expression de l'énergie potentielle électrostatique E_{23} stockée dans le condensateur C_{23} , en fonction de A , d , u , V et ϵ_0 . Que dire de l'énergie électrostatique E_{13} stockée dans le condensateur C_{13} .
- 15) A partir de E_{23} calculée précédemment, déterminer l'expression de la force électrostatique \vec{F}_e s'appliquant sur l'électrode (3), en fonction de C_{23} , V et \vec{e}_x puis en fonction de A , V , ϵ_0 , d , u et \vec{e}_x .

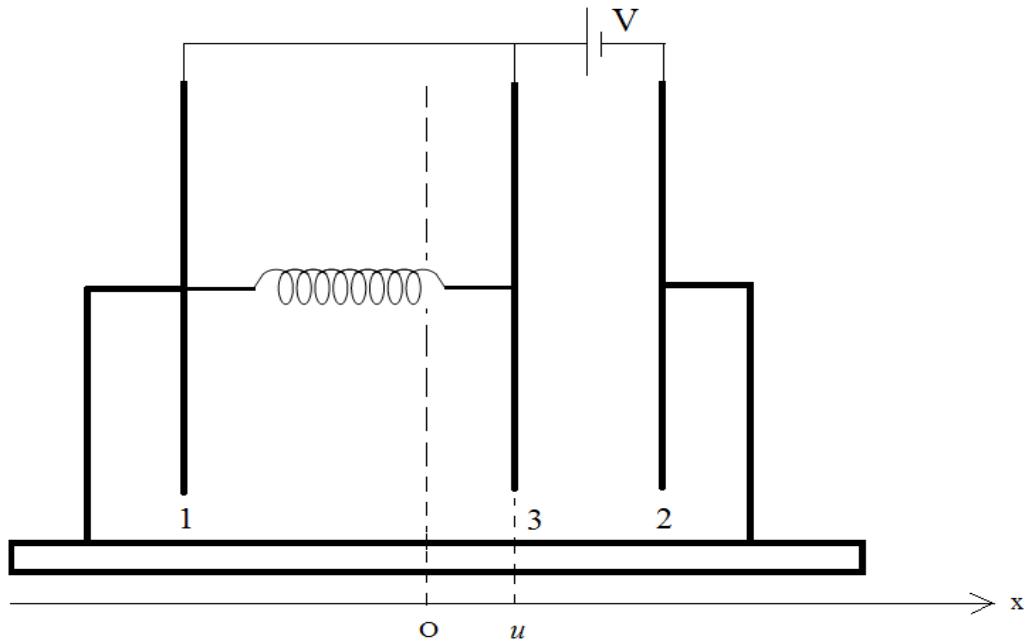


Figure 4.

On note u_{eq} l'abscisse d'une position d'équilibre (en supposant qu'elle existe) de l'électrode (3).

- 16) Déterminer l'expression de V^2 en fonction de u_{eq} , k , A , d et ϵ_0 .
- 17) Représenter graphiquement l'allure de V^2 en fonction de u_{eq} pour $u_{eq} \in [0, d]$.
- 18) Montrer graphiquement que pour une tension appliquée strictement inférieure à une tension critique V_{cr} que l'on déterminera, il existe deux positions d'équilibre.

On admet que seule la position d'équilibre d'abscisse inférieure à $d/3$ est stable.

- 19) Que se passe-t-il si l'abscisse de l'électrode (3) dépasse $d/3$?

Application numérique

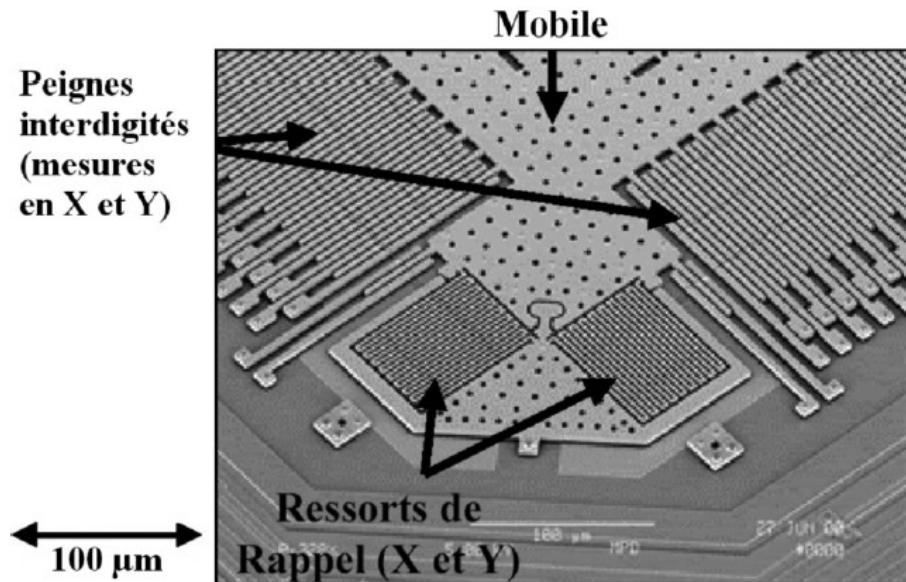
Les valeurs typiques pour un micro-système sont : $k = 1,2 \cdot 10^4 \text{ N/m}$, $A = 0,08 \text{ mm}^2$ et $d = 1 \mu\text{m}$. On rappelle $\epsilon_0 = 8,81 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

- 20) Déterminer un ordre de grandeur de la valeur numérique de V_{cr} .

Deuxième partie

Étude d'un micro-accéléromètre

Une photographie obtenue par microscopie électronique d'un micro-accéléromètre 2 axes est présentée sur l'image ci-dessous. On peut observer les microstructures présentes en surface de dimensions typiquement de l'ordre de la dizaine de micromètres. La masse sismique (mobile) est reliée au bâti par des micro-poutres flexibles insérées dans deux systèmes de peignes interdigités. Chaque peigne est solidaire d'un ressort de rappel.



Micro-accéléromètre 2 axes.

La modélisation d'un axe de l'accéléromètre est présentée sur la figure 5.

La masse mobile m est posée sur un support horizontal et glisse selon l'axe Ox.

Le mobile, repéré par la position $x_c(t)$ de son centre de gravité, est rendu solidaire du support via deux systèmes ressort/amortisseur de raideur k et de coefficient d'amortissement visqueux f .

Le support peut aussi se déplacer en bloc selon Ox : on repère sa position par $x_b(t)$.

On supposera que lorsque le système masse-ressort est au repos dans le référentiel du support, le mobile est situé à égale distance des électrodes (1) et (2), à savoir $x_c = x_b$.

Les micro-poutres sont modélisées par les électrodes parfaitement conductrices (1), (2) et (3).

L'électrode centrale (3) est solidaire de la masse mobile. On note m la masse totale mobile.

Les électrodes (1) et (2) sont connectées respectivement aux générateurs de tension $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

La tension $v_3(t)$ constitue la sortie de l'accéléromètre.

On note $2d$ la distance entre les deux électrodes (1) et (2).

Le milieu entre les électrodes est assimilable à du vide.

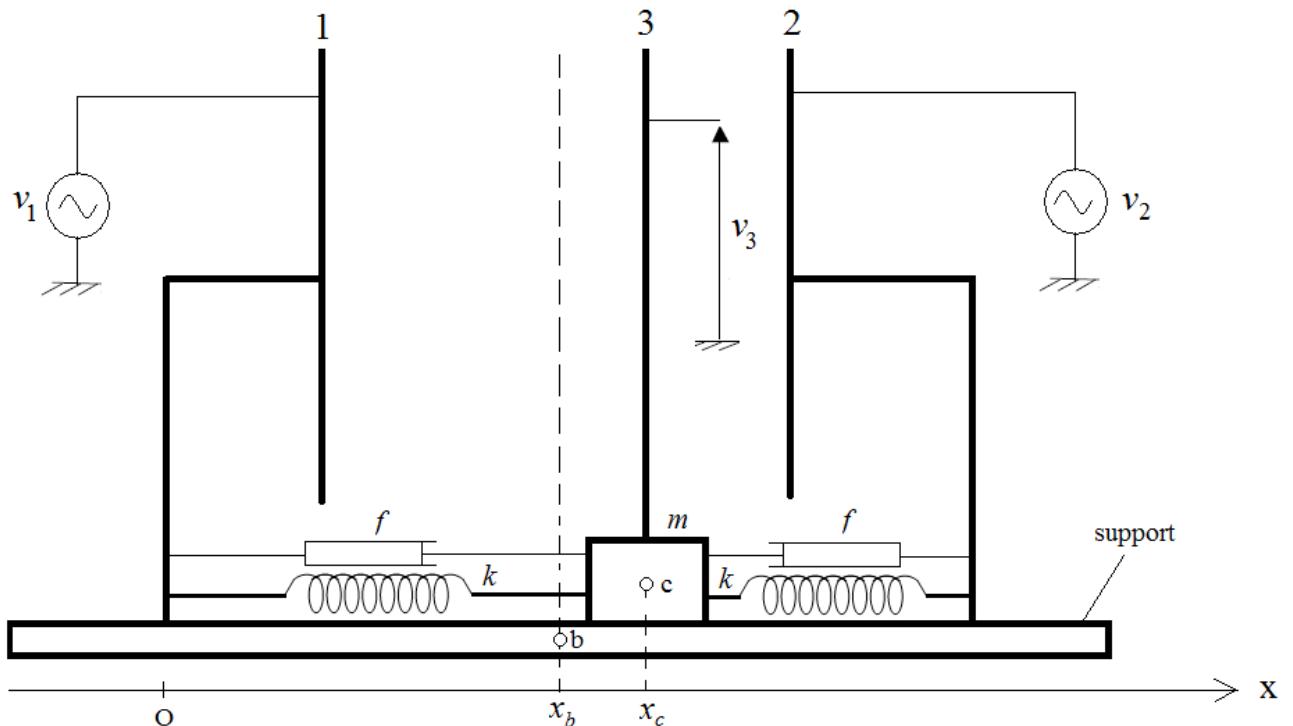


Figure 5.

1- Étude mécanique de l'accéléromètre

On supposera dans toute cette partie que la résultante des forces électrostatiques agissant sur l'électrode (3) est nulle.

Dans un premier temps, on suppose le support immobile (l'abscisse du support $x_b(t)$ est constante).

$$\text{On pose : } \alpha = \sqrt{\frac{f^2}{2km}} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} .$$

21) Déterminer l'expression de $x_c(t)$ pour $t > 0$ lorsque $\alpha = 1$ et compte-tenu des conditions initiales : $x_c(0) = X_0$ et $\left(\frac{dx_c}{dt}\right)(0) = 0$.

22) Tracer l'allure de $x_c(t)$.

On suppose maintenant le support mobile et on note $a(t) = \frac{d^2 x_b}{dt^2}$ son accélération.

On note $u(t) = x_c(t) - x_b(t)$ le déplacement du mobile sur le support.

23) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ dans laquelle on fera apparaître les paramètres α et ω_0 .

On s'intéresse au régime harmonique en supposant que l'accélération du support est de type sinusoïdale. On note \underline{a} l'expression complexe de $a(t)$ et \underline{u} celle de $u(t)$.

24) Déterminer l'expression de la fonction de transfert $T = \omega_0^2 \frac{\underline{u}}{\underline{a}}$.

25) Déterminer l'expression de T lorsque $\alpha=1$ et tracer les diagrammes de Bode asymptotiques correspondants (module et phase) lorsque $\omega_0 = 4.10^5$ rd/s.
Tracer aussi l'allure des diagrammes de Bode réels.

On suppose que le support se déplace très lentement par rapport au mouvement du mobile, ce qui revient à se placer dans le régime $\omega \ll \omega_0$.

26) Montrer que $u(t)$ peut s'écrire de façon approchée sous la forme : $u(t) = \gamma a(t)$.
Déterminer l'expression de γ .

2- Étude de l'électronique de conditionnement du micro-accélémètre

On note C_{13} la capacité du condensateur constitué des électrodes (1) et (3) et C_{23} la capacité du condensateur constitué des électrode (2) et (3).

Dans cette partie, on négligera les variations des capacités C_{13} et C_{23} en fonction du temps.

Les condensateurs sont insérés dans le système de conditionnement électronique de la figure 6.

L'oscillateur sinusoïdal délivre une tension $v_1(t) = V_{cc}/2 + V_1 \sin(\omega t)$.

La tension $v_2(t)$ est déphasée de π par rapport à $v_1(t)$: $v_2(t) = v_1(t + \pi/\omega)$.

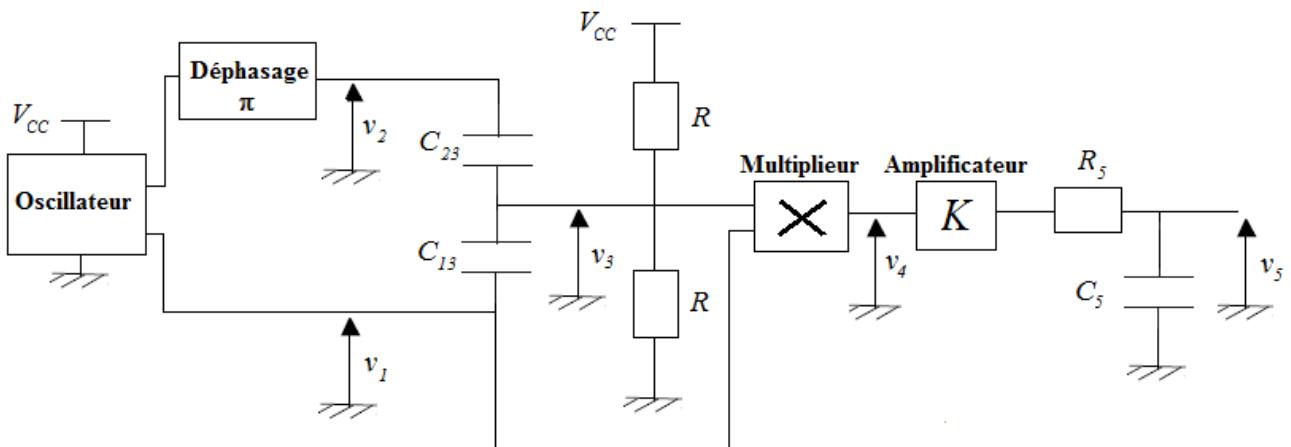


Figure 6.

27) En supposant que l'impédance d'entrée du multiplicateur est infinie, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $v_3(t)$. On mettra cette équation sous la forme :

$$\frac{dv_3}{dt} + \frac{v_3}{\tau} = F(t)$$

où l'on déterminera l'expression de τ et on mettra la fonction $F(t)$ sous la forme : $F(t) = A + B \cos(\omega t)$ en exprimant A et B en fonction de C_{13} , C_{23} , V_1 et τ .

La résolution de cette équation différentielle peut s'effectuer en utilisant le théorème de superposition qui permet de rechercher la solution complète en considérant la solution sans second membre et les contributions de chaque terme forçant.

28) Déterminer l'expression de $v_3(t)$ en régime forcé.

29) En déduire l'expression approchée de $v_3(t)$ lorsque $\omega\tau \gg 1$ et dans le cas où $v_3(0)=V_{cc}/2$.

On utilisera pour la suite du problème l'expression approchée de $v_3(t)$ obtenue à la question précédente.

30) En assimilant C_{13} et C_{23} à des condensateurs plans parfaits de surface A , déterminer l'expression de $v_3(t)$ en fonction de V_{cc} , u , d , V_1 et ω .

31) Déterminer l'expression de la tension $v_4(t)$ à la sortie du multiplieur.

32) Montrer que pour un choix judicieux du temps caractéristique R_5C_5 , la tension $v_5(t)$ peut s'écrire sous la forme approchée : $v_5(t) \approx V_0 + Sa(t)$.

3- Analyse de spécifications d'un accéléromètre typique - Applications numériques.

Les spécifications de l'accéléromètre sont les suivantes :

- tension d'alimentation : 5 V
- tension de repos : 2,5 V
- tension de sortie maximale : 4,5 V
- sensibilité : 0,1 V.m⁻¹.s²
- accélération maximale supportée : 40.10³ m⁻¹.s²
- bande passante : 400 Hz
- pulsation de résonance mécanique : 4.10⁵ rd/s
- temps de réponse à 5% : 5 ms
- fréquence de modulation : 140 kHz
- masse mobile : 0,5 µg

De plus, on choisit $C_5=10\text{ nF}$.

33) Déterminer les valeurs numériques de V_0 , S , K , k et R_5 .

34) Déterminer la valeur maximale de l'accélération a_{max} mesurable par le capteur.

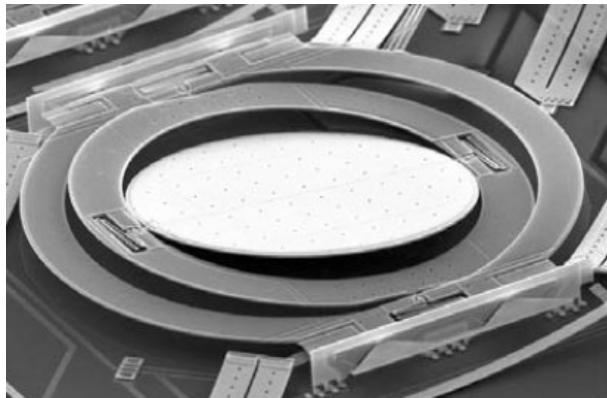
35) Déterminer le déplacement maximum u_{max} supporté par la poutre centrale.

36) L'hypothèse $\omega\tau \gg 1$ est-elle respectée ?

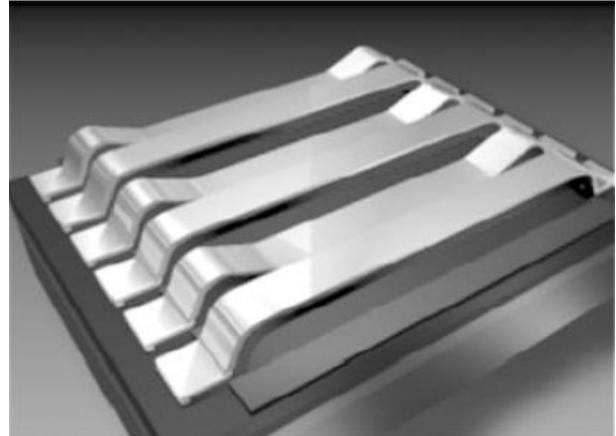
Troisième partie

Commutateur de lumière à réseau

Nous savons, d'après la première partie, qu'il est possible de contrôler électriquement la position d'une micro-poutre. Ce mécanisme est à la base du fonctionnement de composants optiques micro-structurés, tels que les micro-miroirs ou les réseaux optiques modulables (cf. images ci-dessous) aujourd'hui couramment utilisés, par exemple dans les systèmes de vidéoprojection.



Micro-miroir



Réseau optique modulable

1- Étude d'un réseau optique modulable

Le modèle du réseau optique modulable est décrit sur la figure 7. Il est composé d'un réseau de N micro-électrodes parfaitement réfléchissantes, de largeur $\Lambda/2$, espacées d'une longueur Λ , et séparées d'une épaisseur d d'un support mobile lui aussi parfaitement réfléchissant. Il est possible de modifier la valeur de d en changeant la tension V appliquée au support mobile.

Le système est éclairé en incidence normale par une onde plane progressive monochromatique de longueur d'onde λ et on cherche à déterminer la structure de la lumière diffractée à l'infini.

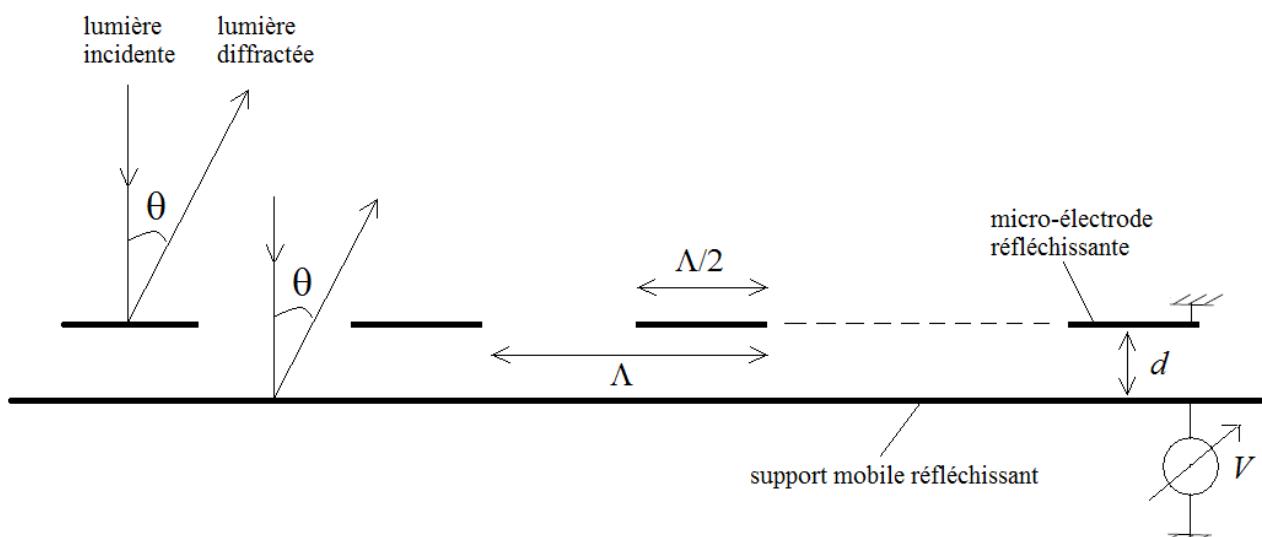


Figure 7.

1a- Diffraction par un motif du réseau

37) Rappeler le principe de Huygens-Fresnel.

On commence par étudier la diffraction à l'infini de l'onde plane incidente par une seule électrode du réseau (cf. figure 8a). L'électrode est supposée plane et infiniment étendue dans le plan perpendiculaire à la figure.

On note $r_1(x)$, le facteur de réflexion en amplitude de l'électrode, défini par : $r_1(x)=1$ si $|x| \leq \Lambda/4$ et $r_1(x)=0$ si $|x| \geq \Lambda/4$ (cf. figure 9).

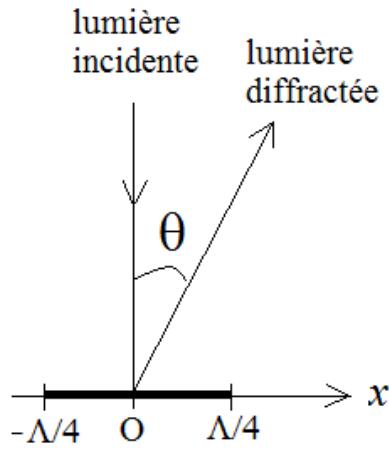


Figure 8a.

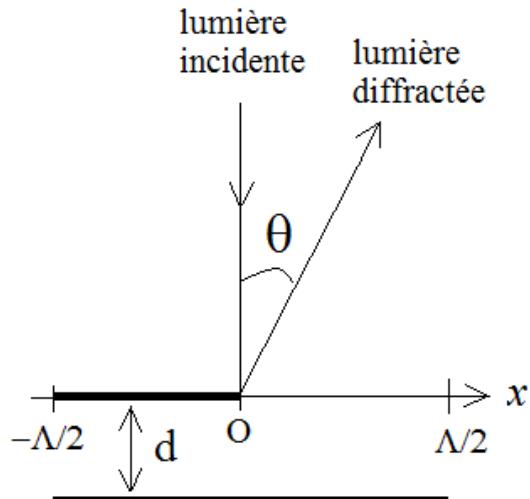


Figure 8b.

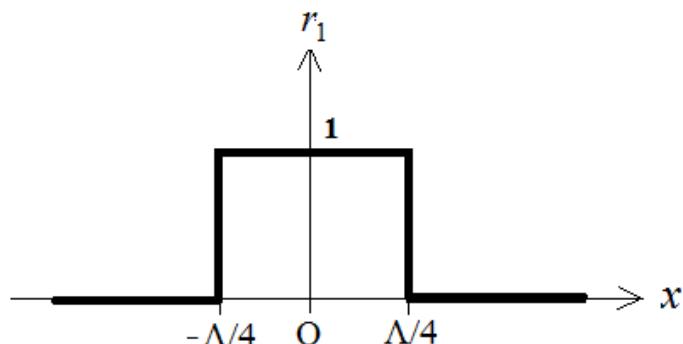


Figure 9.

38) Déterminer sous forme d'une intégrale l'expression de ψ_{dl} , amplitude complexe de l'onde diffractée à l'infini dans la direction θ (approximation de Fraunhofer) par une seule électrode. On exprimera ψ_{dl} en fonction du vecteur k de l'onde diffractée, de $\sin(\theta)$, de $r_1(x)$ ainsi que d'un facteur de proportionnalité que l'on notera β .

39) Déterminer l'expression de ψ_{dl} puis de l'intensité diffractée $I_{dl}(\theta)$. On introduira l'intensité $I_0 = I_{dl}(0)$ et on mettra l'expression de I_{dl} sous la forme $I_{dl}(\theta) = I_0 \text{sinc}^2(A \sin(\theta))$ où A est une constante s'exprimant en fonction de λ et Λ , et sinc la fonction « sinus cardinal » définie par $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

40) Représenter graphiquement I_{dl} en fonction de $\sin(\theta)$ en supposant $\Lambda=8\lambda$.

On cherche maintenant à déterminer l'amplitude de l'onde diffractée par un motif (cf. figure 8b).

41) Montrer que le facteur de réflexion en amplitude d'un motif peut s'écrire sous la forme $r_m(x)=r_1(x+\Lambda/4)+r_1(x-\Lambda/4)e^{j\phi}$ où ϕ est une phase que l'on déterminera en fonction de k et d .

42) Montrer que l'expression de ψ_{dm} , amplitude diffractée à l'infini par un motif, peut s'écrire sous la forme $\psi_{dm}=\psi_{dl}(e^{j\alpha}+e^{-j(\alpha-2kd)})$, où α s'exprime en fonction de k , $\sin\theta$ et Λ .

43) En déduire l'expression de l'intensité diffractée à l'infini I_{dm} par un motif.

1.b Interférences créées par tous les motifs

On considère enfin les interférences créées par tous les motifs du réseau (cf. figure 10). On supposera que le nombre de motifs est infini.

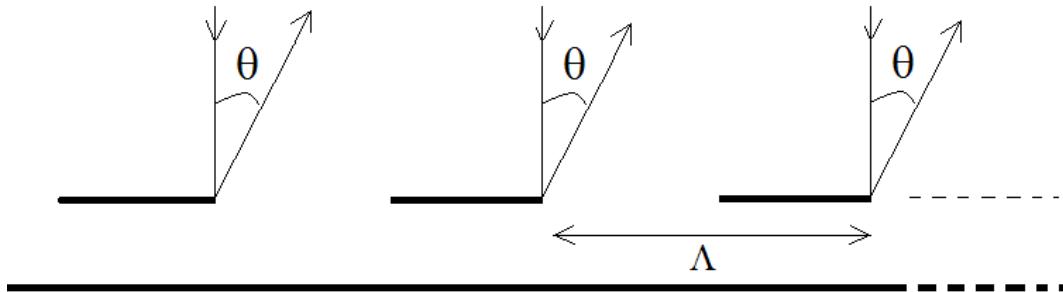


Figure 10.

44) Etablir la relation vérifiée par $\sin(\theta_p)$ où θ_p correspond à la direction du spectre d'ordre p du réseau.

45) Montrer que lorsque $d=\lambda/4$, seuls les spectres d'ordres p impairs existent, et de façon prépondérante les ordres $p=\mp 1$, alors que pour $d=\lambda/2$, seul l'ordre 0 existe.

46) Montrer que les résultats de la question précédente peuvent s'interpréter qualitativement en considérant les interférences entre deux rayons réfléchis par chacune des électrodes d'un motif.

2- Commutateur de lumière

Le montage de la figure 11 illustre le principe du commutateur de lumière à réseau. L'électronique de commande permet de contrôler l'épaisseur d du réseau de telle sorte que pour une tension appliquée $V=V_{\lambda/2}$, $d=\lambda/2$ et pour $V=V_{\lambda/4}$, $d=\lambda/4$.

On note S, O₁, O₂ et E, respectivement les positions sur l'axe optique de la source ponctuelle, des centres des lentilles minces L₁ et L₂, et de l'écran.

L'axe optique SO_1 est perpendiculaire au réseau.

On note f_1 et f_2 les distances focales des lentilles L_1 et L_2 .

On fixe les distances $SO_1 = f_1$ et $O_2E = f_2$.

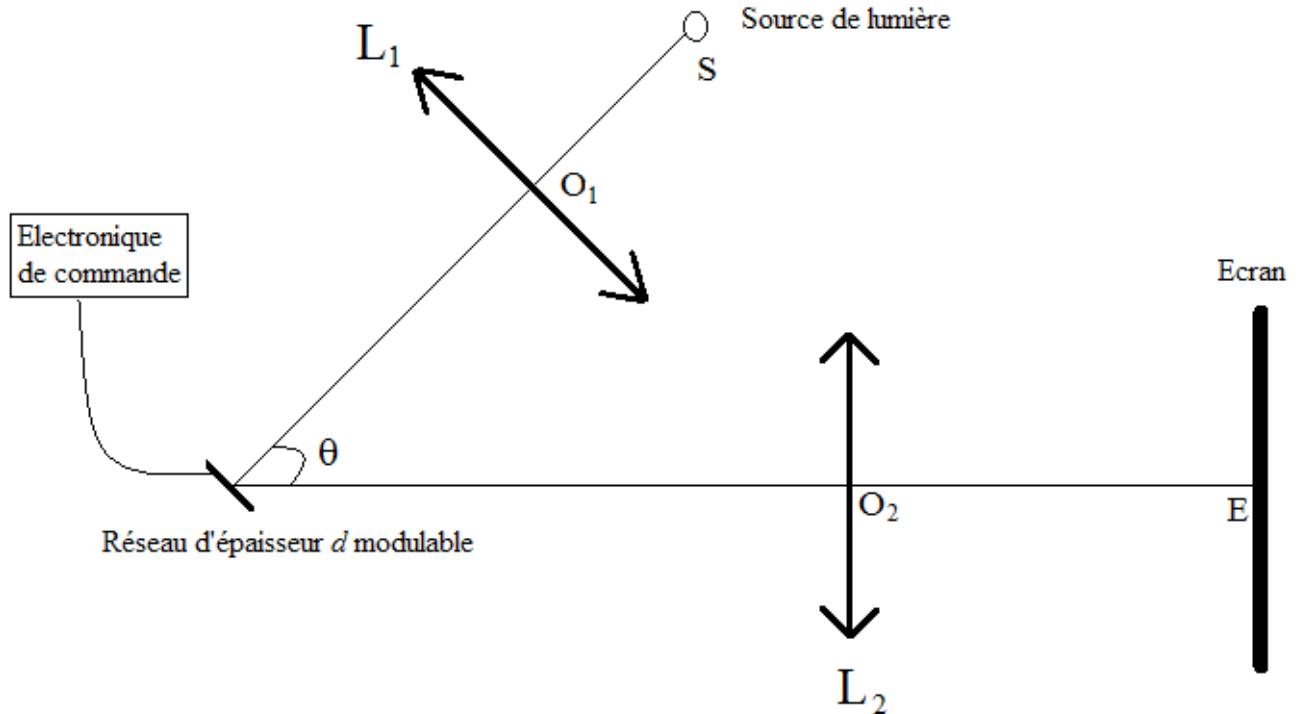


Figure 11.

47) Expliquer schématiquement le principe du commutateur de lumière à réseau. On pourra refaire le schéma de la figure 11 en représentant, dans l'approximation de Gauss, le parcours de deux rayons bien choisis issus de la source de lumière. On considérera deux cas possibles : lorsque $V=V_{\lambda/4}$ puis lorsque $V=V_{\lambda/2}$.

48) Quelle relation doit vérifier l'angle θ en fonction de λ et Λ ?

49) On fixe $\theta=30^\circ$. Déterminer la valeur numérique du rapport Λ/λ .

On suppose maintenant que S est une source de lumière blanche et que le commutateur de lumière met en œuvre trois réseaux (cf. figure 11) de pas Λ_r , Λ_v , Λ_b permettant de commuter les 3 couleurs, rouge, verte et bleue de longueurs d'onde respectives λ_r , λ_v et λ_b .

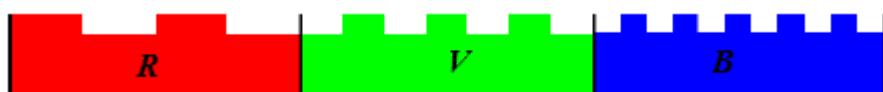


Figure 11.

50) Déterminer les valeurs numériques de Λ_r , Λ_v et Λ_b pour $\lambda_r=700 \text{ nm}$, $\lambda_v=546 \text{ nm}$ et $\lambda_b=436 \text{ nm}$.

*****FIN*****

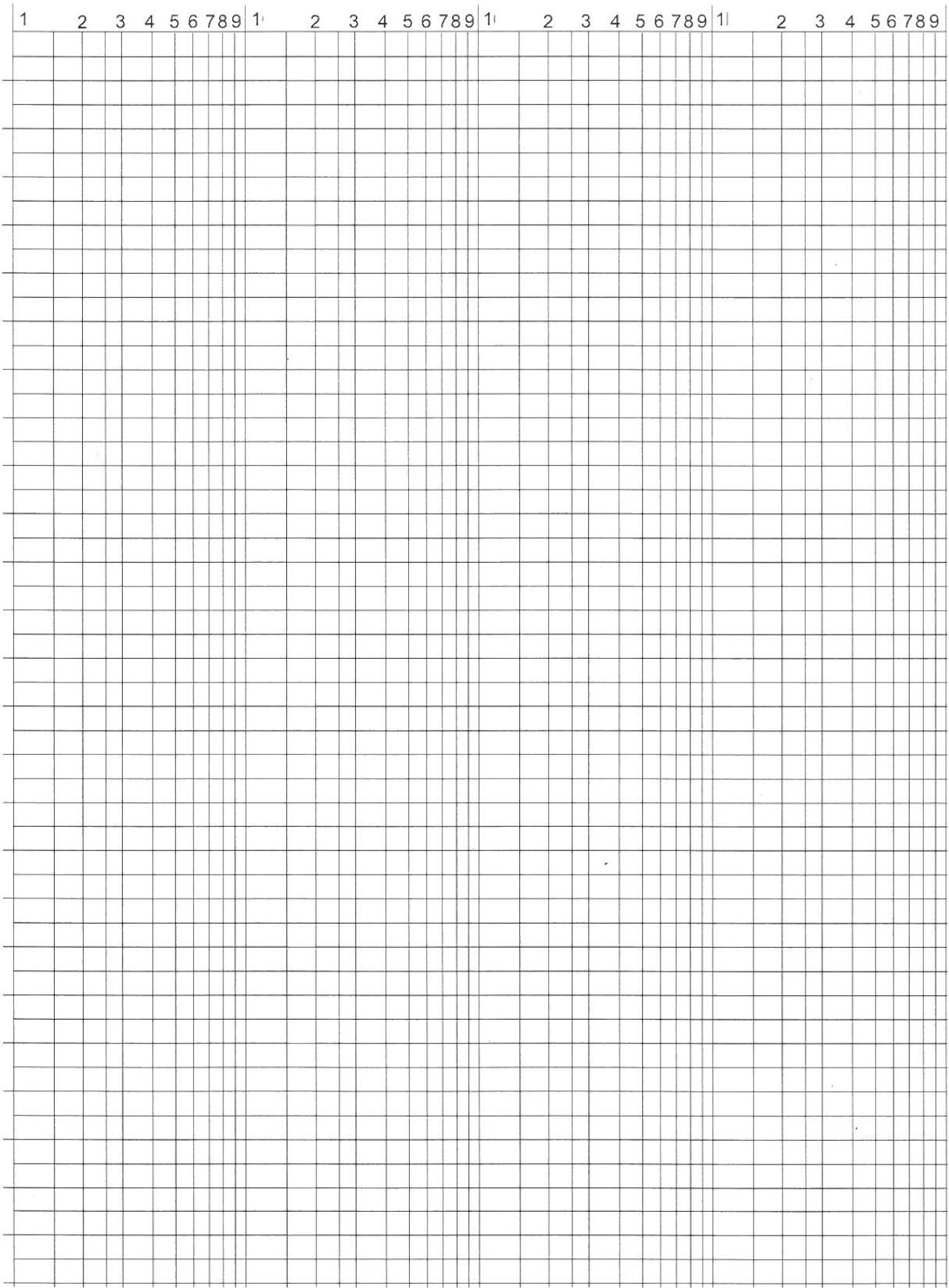


Diagramme de Bode (4 décades)