Début de l'épreuve

Pour $d \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$ dans $\mathbb{R}^d$, nous noterons :

- $x \cdot y$ le produit scalaire usuel de x et y.

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

- $\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$, la norme euclidienne usuelle de x,
- $[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda \in [0, 1]\}$ le segment joignant x à y.

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}^d$ est convexe si pour tout $(x, y) \in A^2$, on a $[x, y] \subset A$. Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous noterons

$$\begin{aligned} &A + B := \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\},\ \lambda A := \{\lambda a,\ a \in A\} \\ &A - B := A + (-1)B,\ A - x := A - \{x\} \end{aligned}$$

nous noterons $\dim(A)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par $A - a$ où a est un élément quelconque de A (cette définition étant indépendante du choix de $a \in A$). En particulier si x et y appartiennent à $\mathbb{R}^d$ et $x \neq y$, on a $\dim(\{x\}) = 0$, et $\dim([x, y]) = 1$.

Pour $M \in \mathcal{M}_{m \times d}(\mathbb{R})$, nous identifierons toujours M à l'application linéaire dont M est la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^m$ et noterons donc

$$\mathrm{Ker}(M) := \left\{x \in \mathbb{R}^d : Mx = 0\right\},\ \mathrm{Im}(M) := \left\{Mx, x \in \mathbb{R}^d\right\}$$

enfin M^T désignera la transposée de M.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $\mathbb{R}^k_+$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}^k$ dont les coordonnées sont dans $\mathbb{R}_+$ et pour y_1 et y_2 dans $\mathbb{R}^k$, nous écrirons $y_1 \geqslant y_2$ (ou $y_2 \leqslant y_1$) quand $y_1 - y_2 \in \mathbb{R}^k_+$.

On rappelle enfin que toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^k$ possède une extraction qui converge.

Partie I : Projection et séparation

Projection

Soit C une partie non vide, convexe et fermée de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d$, considérons :

$$\inf_{y \in C} \|x - y\|^2. \tag{1}$$

1) Montrer que (1) possède une unique solution (c'est à dire qu'il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\|^2 \leqslant \|x - z\|^2$ pour tout $z \in C$) que nous appellerons projection de x sur C et noterons $\mathrm{proj}_C(x)$. Montrer que $x = \mathrm{proj}_C(x)$ si et seulement si $x \in C$.

2) Soit $y \in \mathbb{R}^d$ montrer que

$$y = \text{proj}_C(x) \Longleftrightarrow y \in C \text{ et } (x-y)\cdot(z-y) \leqslant 0,\ \forall z \in C.$$

3) Montrer que pour tout $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, on a

$$\left(\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\right)\cdot(x_1 - x_2) \geqslant \left\|\text{proj}_C(x_1) - \text{proj}_C(x_2)\right\|^2,$$

et en déduire que proj_C est continue.

4) Déterminer explicitement proj_C dans les cas suivants :

$$i)\ C = \mathbb{R}^d_+,\ ii) C = \left\{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leqslant 1\right\},$$
$$iii)\ C = \left\{y \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d y_i \leqslant 1\right\},\ iv) C = [-1,1]^d.$$

Séparation

Soit C et D deux parties convexes non vides de $\mathbb{R}^d$ telles que

$$C \text{ est fermée et bornée, } D \text{ est fermée, et } C \cap D = \emptyset.$$

5) Montrer que $D - C$ est une partie convexe fermée de $\mathbb{R}^d$ ne contenant pas 0.

6) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$ tels que

$$p\cdot x \leqslant p \cdot y - \varepsilon,\ \forall (x,y) \in C \times D.$$

(on dit que C et D peuvent être séparés strictement).

7) Soit C une partie convexe fermée non vide de $\mathbb{R}^d$ et soit $\sigma_C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par :

$$\sigma_C(p) := \sup\{p \cdot x,\ x \in C\}$$

montrer que

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^d : p\cdot x \leqslant \sigma_C(p),\ \forall p \in \mathbb{R}^d\right\}$$

(de sorte que C est une intersection de demi-espaces fermés).

8) Soit A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^d$ et $x \in \mathbb{R}^d \backslash A$, montrer qu'il existe $p \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ tel que

$$p \cdot x \leqslant p \cdot y,\ \forall y \in A.$$

Partie II : Points extrémaux

Soit E une partie de $\mathbb{R}^d$, on appelle enveloppe convexe de E et l'on note $\mathrm{co}(E)$ l'ensemble

$$\mathrm{co}(E) := \left\{ \sum_{i=1}^{I} \lambda_i x_i,\ I \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{I} \lambda_i = 1, (x_1, \dots, x_I) \in E^I \right\}.$$

Soit A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^d$, nous dirons que $x \in A$ est un point extrémal de A si $\forall (y, z, \lambda) \in A \times A \times]0, 1[$, on a

$$x = (1 - \lambda) y + \lambda z \Rightarrow y = z.$$

Nous noterons $\mathrm{Ext}(A)$ l'ensemble des points extrémaux de A.

Cas particuliers

9) Soit A une partie convexe non vide de $\mathbb{R}^d$. Soit $I \in \mathbb{N}^*, x_1, \dots x_I \in A^I$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_I) \in \mathbb{R}_+^I$ tels que $\sum_{i=1}^I \lambda_i = 1$, montrer que :

- a) $\sum_{i=1}^I \lambda_i x_i \in A$,
- b) si $x := \sum_{i=1}^I \lambda_i x_i \in \mathrm{Ext}(A)$ alors $x_i = x$ pour tout $i \in \{1, \dots, I\}$ tel que $\lambda_i > 0$.

10) Soit E une partie de $\mathbb{R}^d$ montrer que $\mathrm{co}(E)$ est le plus petit convexe contenant E et que $\mathrm{Ext}(\mathrm{co}(E)) \subset E$.

11) Soit $A = \mathrm{co}(E)$ où E est la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$E = \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\} \cup \{(1 + \cos(\theta), \sin(\theta), 0),\ \theta \in [0, 2\pi]\}$$

montrer que $\mathrm{Ext}(A)$ est non vide et n'est pas fermée.

12) Soit $k \in \mathbb{N}^*, (p_1, \dots, p_k) \in \left(\mathbb{R}^d\right)^k$ et $(b_1, \dots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que

$$A := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : p_i \cdot x \leqslant b_i,\ i = 1, \dots, k \right\}$$

soit non vide. Montrer que A est convexe et fermée. Soit $x \in A$, soit $I(x) := \{i \in \{1, \dots, k\} : p_i \cdot x = b$
montrer que

$$x \in \mathrm{Ext}(A) \Longleftrightarrow \mathrm{rang}\left(\{p_i,\ i \in I(x)\}\right) = d$$

en déduire que $\mathrm{Ext}(A)$ est un ensemble fini (éventuellement vide) dont le cardinal est inférieur ou égal à 2^k.

Cas d'un convexe fermé borné

Dans les trois questions qui suivent, K est une partie non vide, convexe, fermée et bornée de $\mathbb{R}^d$.

13) Soit $p \in \mathbb{R}^d$, posons

$$K_p := \{x \in K : p \cdot x \leqslant p \cdot y, \ \forall y \in K\}.$$

Montrer que K_p est non vide, convexe et fermée et que $\operatorname{Ext}(K_p) \subset \operatorname{Ext}(K)$.

14) Montrer que $\operatorname{Ext}(K)$ est non vide (on pourra se ramener au cas où $0 \in K$ et raisonner sur la dimension de K).

15) Montrer que $K = \operatorname{co}(\operatorname{Ext}(K))$.

Partie III : Un résultat de dualité

Cônes convexes

On dit qu'une partie F de $\mathbb{R}^d$ est un cône si $\lambda F \subset F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}^d$, le cône polaire de E est défini par

$$E^+ := \left\{p \in \mathbb{R}^d : p \cdot x \geqslant 0, \ \forall x \in E\right\}$$

et son cône bi-polaire par

$$E^{++} = \left(E^+\right)^+ := \left\{\xi \in \mathbb{R}^d : \xi \cdot p \geqslant 0, \ \forall p \in E^+\right\}.$$

16) Montrer que E^+ et E^{++}sont des cônes convexes fermés et que $E \subset E^{++}$.

17) Montrer que $E = E^{++}$ si et seulement si E est un cône convexe fermé.

18) Soit $\xi_1, \dots, \xi_k, k$ éléments de $\mathbb{R}^d$ et

$$F := \left\{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \xi_i, \ (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}_+^k\right\}$$

montrer que F est un cône convexe fermé. Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$, montrer que l'équivalence entre :

- $\xi \in F$,
- $\xi \cdot x \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\xi_i \cdot x \geqslant 0, \ i = 1, \dots, k.$$

Programmation linéaire

Soit $M \in \mathcal{M}_{k\times d}(\mathbb{R})$, $b = (b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ et $p \in \mathbb{R}^d$. Posons

$$\alpha := \inf \left\{ p \cdot x : x \in \mathbb{R}^d,\ x \geqslant 0,\ Mx \leqslant b \right\}$$

et

$$\beta := \sup \left\{ b \cdot q : q \in \mathbb{R}^k,\ q \leqslant 0,\ M^T q \leqslant p \right\}$$

(en adoptant la convention : $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$).

19) Montrer que $\alpha \geqslant \beta$.

20) On suppose qu'il existe $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\bar{x} \geqslant 0,\ M\bar{x} \leqslant b \text{ et } p \cdot \bar{x} = \alpha.$$

En notant M_i le vecteur de $\mathbb{R}^d$ dont les coordonnées sont les coefficients de la i-ème ligne de M, posons :

$$I := \{ i \in \{1, \ldots, k\} : M_i \cdot \bar{x} = b_i \}$$

et

$$J := \{ j \in \{1, \ldots, d\} : \bar{x}_j = 0 \}.$$

- a) Montrer que $p \cdot z \geqslant 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$z_j \geqslant 0 \text{ pour tout } j \in J \text{ et } M_i \cdot z \leqslant 0 \text{ pour tout } i \in I.$$

- b) Montrer qu'il existe $\bar{q} \in \mathbb{R}^k$ tel que :

$$\bar{q} \leqslant 0,\ M^T\bar{q} \leqslant p,\ \bar{q} \cdot (M\bar{x} - b) = 0 \text{ et } \left(p - M^T\bar{q}\right) \cdot \bar{x} = 0.$$

- c) Montrer que $b \cdot \bar{q} = \alpha = \beta$.

Partie IV : Systèmes linéaires sous-déterminés

Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{d} |x_i|\,,\ \|x\|_\infty := \max \{ |x_i|\,,\ i = 1, \ldots, d \}$$
$$I_+(x) := \{ i \in \{1, \ldots, d\} : x_i > 0 \}\,, I_-(x) := \{ i \in \{1, \ldots, d\} : x_i < 0 \}$$

et

$$I_0(x) := \{i \in \{1, \dots, d\} : x_i = 0\}.$$

Soit $M \in \mathcal{M}_{k\times d}(\mathbb{R})$ et supposons que

$$\text{rang}(M) = k.$$

Soit $b \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, l'objectif de cette partie est de trouver une solution du système linéaire

$$Mx = b$$

ayant au plus k coordonnées non nulles par une méthode de minimisation. Pour ce faire, on s'intéresse à :

$$r := \inf \left\{ \|x\|_1,\ x \in \mathbb{R}^d,\ Mx = b \right\}.$$

21) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\|x\|_1 = \max \left\{ x \cdot y,\ y \in \mathbb{R}^d,\ \|y\|_\infty \leqslant 1 \right\},$$

et

$$\|x\|_\infty = \max \left\{ x \cdot y,\ y \in \mathbb{R}^d,\ \|y\|_1 \leqslant 1 \right\}.$$

22) Notons C l'ensemble :

$$C := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : Mx = b,\ \|x\|_1 = r \right\}.$$

Montrer que C est non vide, convexe, fermé et borné.

23) Fixons $\bar{x} \in C$. Montrer qu'il existe $q \in K\text{er}(M)^\perp \setminus \{0\}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, on ait

$$q_i \bar{x}_i = \|q\|_\infty |\bar{x}_i|.$$

24) Soit K l'ensemble des $y \in \mathbb{R}^d$ tels que

$$My = b,\ y_i = 0\ \forall i \in I_0(\bar{x}),\ q_i y_i \geqslant 0\ \forall i \in \{1, \dots d\}$$

Montrer que K est non vide et inclus dans C.

25) Montrer que si $y \in \text{Ext}(K)$ alors

$$h \in \text{Ker}(M) \text{ et } I_0(y) \subset I_0(h) \Rightarrow h = 0.$$

26) En déduire que si $y \in \text{Ext}(K)$ alors le cardinal de $I_+(y) \cup I_-(y)$ est inférieur ou égal à k.

Fin du sujet.