

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé pour toutes les épreuves d'admissibilité, sauf pour les épreuves de français et de langues. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Soit E l'ensemble des fonctions réelles g définies sur $\mathbb{R}$ possédant les propriétés suivantes :

- i/ g est paire,
- ii/ g est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux, bornée sur $\mathbb{R}$ et le nombre de points de discontinuité de g est fini. On note $g^+(x) = \lim_{y \rightarrow x, y > x} g(y)$ et $g^-(x) = \lim_{y \rightarrow x, y < x} g(y)$,
- iii/ en tout point x de $\mathbb{R}$, on a $g(x) = \frac{g^+(x) + g^-(x)}{2}$,
- iv/ g est intégrable sur $[0, +\infty[$.

À toute fonction g de E , on associe la fonction réelle $\mathcal{F}_g$ définie par l'intégrale :

$$\mathcal{F}_g(t) = \int_0^\infty g(x) \cos(tx) dx. \quad (1)$$

Dans ce problème, nous étudions une méthode permettant de montrer, dans certains cas, que l'équation $\mathcal{F}_g(t) = 0$ possède une infinité de racines réelles.

Partie I

I.1/ Soit g appartenant à E . Montrer que $\mathcal{F}_g$ définie par (1) est une fonction paire continue.

I.2/ Soit g définie par $g(x) = \exp(-|x|)$.

I.2.a/ Calculer $\mathcal{F}_g(t)$.

I.2.b/ La fonction $\mathcal{F}_g$ possède-t-elle des zéros réels ?

I.2.c/ La fonction $\mathcal{F}_g$ est-elle dans E ?

I.3/ On désigne par $h_{a,A}$ (a réel non nul et A réel strictement positif) la fonction de E définie par

$$\begin{cases} h_{a,A}(x) = a, & |x| < A \\ h_{a,A}(x) = \frac{a}{2}, & |x| = A \\ h_{a,A}(x) = 0, & |x| > A. \end{cases}$$

I.3.a/ Calculer $S_{a,A}(t) = \int_0^\infty h_{a,A}(x) \cos(tx) dx$.

I.3.b/ Tracer le graphe de $S_{a,A}$.

I.3.c/ La fonction $S_{a,A}$ possède-t-elle des zéros réels ?

I.3.d/ La fonction $S_{a,A}$ est-elle dans E ?

Partie II

Dans toute cette partie g désigne une fonction quelconque de E .

II.1/ Soient a, b deux réels. Montrer que l'intégrale $I_n = \int_a^b g(x) \sin(nx) dx$ tend vers 0 lorsque l'entier n tend vers l'infini.

II.2/ Soit $\alpha_n = \int_0^1 \frac{\sin(nx)}{x} dx$.

II.2.a/ Montrer que cette intégrale est bien définie pour tout n entier.

II.2.b/ Montrer que

$$\alpha_n = \frac{1 - \cos(n)}{n} + \int_0^n \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx.$$

II.2.c/ En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n>0}$ possède une limite l strictement positive quand n tend vers l'infini.

II.3/

II.3.a/ Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g(x) \frac{\sin(nx)}{x} dx$

(Indication : on introduira la fonction $x \mapsto \phi(x) = \frac{g(x) - g^+(0)}{x}$).

II.3.b/ Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x) \frac{\sin(nx)}{x} dx$ en fonction de l , $g^+(0)$ et $g^-(0)$.

II.3.c/ Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \frac{\sin(nx)}{x} dx$.

II.4/ Montrer que, pour tout réel x ,

$$\int_{-n}^n dt \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(x+y) \cos(ty) dy \right) = 4 \int_0^n \mathcal{F}_g(t) \cos(xt) dt.$$

II.5/ En déduire que g peut s'écrire $g(x) = \frac{1}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \mathcal{F}_g(t) \cos(xt) dt$.

II.6/ La fonction $t \mapsto F(t) = \mathcal{F}_g(t) \cos(yt)$ est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout g de E et pour tout y réel ?

Partie III

III.1/ Soit g appartenant à E . On suppose que $\mathcal{F}_g$ possède un nombre fini de zéros réels.

III.1.a/ Montrer qu'il existe a réel non nul et A réel strictement positif tels que $\mathcal{F}_g + h_{a,A}$ soit strictement positive ou strictement négative sur $\mathbb{R}$, où $h_{a,A}$ est la fonction définie à la question I.3.

III.1.b/ Montrer qu'il existe une fonction K de classe C^0 par morceaux, intégrable sur $[0, +\infty[$, de signe constant et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^{\infty} K(t) \cos(xt) dt = lg(x) + S_{a,A}(x).$$

III.2/ En déduire que si g appartient à E et a au moins un point de discontinuité, alors $\mathcal{F}_g$ possède une infinité de zéros réels.

III.3/ Soit g la fonction de E définie par $g(x) = e^{-x^4}$. Montrer que $\mathcal{F}_g$ possède une infinité de zéros réels.

(Indication : on développera g en série entière).