ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ENS : LYON, ULM, PARIS-SACLAY

CONCOURS D'ADMISSION 2024

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES, FILIÈRE PC (XEULS)

1. Commentaires généraux

Le sujet de cette année avait pour finalité l'étude des déplacements de $\mathbb{R}^d$ et en particulier de l'écart quadratique minimal entre n points à déplacement près. Il s'agissait donc d'un sujet concernant la géométrie affine même si aucune connaissance spécifique sur ce sujet était attendue.

Les questions du sujet étaient de longueurs et de difficultés variables mais globalement bien réparties dans le sujet, qui était par ailleurs assez long. La difficulté principale dans l'évolution du sujet était de s'approprier les notations et notions introduites au fur et à mesure du sujet. Le sujet comportait des questions sur des domaines variés allant de l'algèbre linéaire et l'algèbre bilinéaire à des notions de distances et de topologies. Aucune ne nécessitait de calculs longs ou techniques et certaines questions étaient classiques (morphismes préservant la multiplication et inverse, bijectivité d'une application, distance, etc.). Une difficulté récurrente des candidats a été d'identifier dans quel espace certains vecteurs vivaient et de se référer aux définitions adéquates. Une seconde difficulté a été de bien gérer son temps et d'utiliser des démonstrations assez synthétiques pour ne pas perdre trop de temps et pouvoir avancer raisonnablement dans le sujet. Pour ce dernier point, une vue globale du sujet et un certain recul sur les connaissances acquises durant l'année ont certainement été déterminantes.

Les deux premières parties du sujet ont été largement traitées, ainsi que les premières questions de la troisième. En revanche les parties 4, 5 et surtout 6 ont été beaucoup moins abordées ou pas totalement. La partie 6 était certainement la plus difficile du problème mais compte-tenu de la longueur du sujet, son traitement n'était pas indispensable pour obtenir la note maximale qui a été atteinte par un petit nombre de candidats.

Rappelons comme chaque année quelques recommandations importantes. Nous insistons sur l'importance d'une rédaction rigoureuse et soignée, ainsi que sur une mise en valeur claire de la structure de la copie (numérotation des questions et présentation adéquate des résultats). De plus, un soin minimal et une écriture lisible sont attendus et l'utilisation des questions précédentes nécessite de les mentionner explicitement et précisément pour être valorisée. Enfin, si la pondération des questions est généralement proportionnelle à leur difficulté, il est absolument nécessaire de prendre le temps de fournir une rédaction correcte des réponses données, y compris pour les résultats élémentaires. La stratégie de survoler le sujet en ne répondant qu'aux questions les plus simples ne pouvant aboutir à une note correcte.

La moyenne des notes des 1495 candidats français et internationaux est de 08,14/20 avec un écart-type de 3,43.

2. Examen détaillé des questions

Partie I. Cette partie était consacrée a des propriétés essentiellement classiques des matrices qu'il convenait de traiter synthétiquement.

1. Question abordée dans essentiellement toutes les copies et classique en utilisant les propriétés du déterminant vis-à-vis du produit et de la transposée.

2. Question abordée dans la majorité des copies et également classique. La rédaction a été très variable allant de trop rapide ou bâclée (il est nécessaire a minima de rappeler les propriétés d'une distance et de les vérifier) à plusieurs pages qui faisait perdre inutilement beaucoup de temps au candidat.

3a. L'application des définitions permettait de montrer l'égalité rapidement par simple calcul. Cette question n'a pas posée de problème particulier à la grande majorité des candidats.

3b. Question très classique et bien réussie par simple calcul de chacun des deux membres.

3c. Question traitée correctement soit par l'utilisation des questions précédentes soit par un calcul direct mais forcément plus long.

4a. Première question qui a pu dérouter certains candidats ne sachant pas comment partir pour la traiter. Pourtant en partant de $R_{i,i} =< Re_i, e_i >$ la réponse tenait en une ligne.

4b. Question bien traitée même par ceux n'ayant pas réussi la question précédente. La seule difficulté était de bien faire apparaître dans la suite d'inégalités que les coefficients α_i sont strictement positifs pour que cette dernière soit valable.

Partie 2. Cette partie établissait des propriétés utiles des déplacements analogues à celle des isométries.
5a. Question traitée par quasiment toutes les copies mais pas toujours soigneusement rédigée. Le terme de translation s'élimine par différence tandis qu'il faut invoquer le fait qu'une rotation conserve la norme pour conclure.

5b. La partie réciproque était immédiate mais à mentionner. Pour la partie directe, en prenant $x = 0$ on pouvait facilement montrer que les deux translations étaient égales. Une fois cela obtenu, l'identification des rotations était immédiate.

5c. La plupart des candidats ont identifié $(\tau, R) = (\mathbf{0}, \mathrm{Id})$ comme élément neutre. L'unicité était alors justifiée par la question précédente.

6a. Il s'agissait d'une question importante pour la suite de l'énoncé puisque la réponse à cette question n'était pas fournie et était nécessaire pour certaines questions par la suite. Un simple calcul utilisant les définitions permettait d'aboutir à $g'' = (R'\tau + \tau', R'R)$ en remarquant que $R'R$ constitue bien une rotation.

6b. La vérification de l'associativité se faisait par un calcul direct à l'aide de la question précédente. Elle n'a pas posée de problème pour ceux ayant obtenu la réponse correcte au préalable en faisant attention au fait que les matrices ne commutent pas.

7a. Beaucoup de candidats ont montré successivement l'injectivité puis invoqué des arguments de dimension, pour lesquels il fallait faire attention que ϕ_g n'était pas linéaire, pour conclure. La surjectivité était aussi assez facilement démontrable directement.

7b. La stratégie principale donnée par la majorité des candidats a été de fournir directement l'inverse de l'application. Attention néanmoins à la rédaction et à bien mentionner que l'inverse envisagé est bien un déplacement. L'unicité vient de la question 5b. et a parfois été oubliée.

7c. Les vérifications ne posaient pas de problème particulier mais il fallait ne pas en oublier.

8. Il s'agit d'une question très mal traitée. Certains ont essayé de deviner la réponse ($d = 1$ où les déplacements se réduisent à des translations) mais sans apporter de preuve ou d'argument. Rappelons qu'une réponse même correcte mais sans justification adéquate ne peut être valorisée.

Partie 3. Cette partie établissait des relations entre les déplacements.

9a. Question qui a été beaucoup traitée et qui relevait d'un calcul direct à l'aide de la nouvelle définition proposée.

9b. Le plus dur dans cette question était de comprendre ce qu'il fallait faire. L'invocation des questions $9a$ et $7c$ et du fait que ϕ_e était l'application identité suffisait alors à répondre en une ligne.

10a. Question assez bien traitée qui découlait de la question $5a$.

10b. Question très mal traitée par un manque de rigueur dans la rédaction. L'évocation de la question précédente ne suffisait pas car il fallait reparamétrer l'infimum en faisant appel à la bijection $g \mapsto g^{-1}$ sur les déplacements. En particulier le caractère bijectif est primordial pour pouvoir reparamétrer ce qui n'a été vu que par une poignée de candidats.

10c. L'utilisation de l'inégalité triangulaire au départ de la preuve a été entrevue par bon nombre de candidats. En revanche, la justification utilisant les questions $9a$ et $10a$ des étapes suivantes a été bien moins précise.

10d. Question plus difficile ; l'argument consistait ici à prendre un double infimum sur g et g' et à reparamétrer les déplacements suivant des arguments similaires à la question $10b$. Et comme pour $10b$, cet argumentaire n'a été réussi que par très peu de candidats.

11a. Question très peu abordée car introduisant une nouvelle notation. Pour obtenir l'inclusion $c(\mathbf{x}) \subset c(\mathbf{y})$ il était utile de s'appuyer sur la question $5a$. L'inclusion inverse s'obtenait de façon analogue ou en invoquant la symétrie des rôles de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

11b. Question de nouveau très peu abordée et pourtant peu difficile. Par définition on avait $\mathbf{x} = g\mathbf{y}$ pour un certain déplacement g et donc $||\mathbf{x} - g\mathbf{y}|| = 0$. L'infimum est donc atteint pour ce déplacement ce qui permettait de conclure.

Partie 4.

12a. Question très peu traitée convenablement probablement à cause des notations pourtant classiques des moyennes. Il s'agissait de décomposer la variance totale en une variance interne et externe ce qui est très classique en statistique et qui utilise le fait que $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y}) = 0$ et $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) = 0$ pour éliminer les doubles produits.

12b. Question assez peu traitée dans l'ensemble. L'existence du minimum peut être justifiée par des arguments topologiques. L'application est positive et divergente à l'infini donc admet et va atteindre son minimum. Pour le trouver, il suffisait d'utiliser la question précédente dont l'un des termes ne dépend pas de τ et le second est positif et s'annule de façon triviale en $\tau = \overline{y} - R\overline{x}$.

13a. Question classique qui a été tentée par de nombreux candidats. Il s'agit d'une application polynomiale dans les coefficients de la matrice M est donc continue. On pouvait aussi invoquer la continuité du produit et de la transposée après les avoir justifié pour conclure.

13b. Question classique qui a été tentée par de nombreux candidats mais souvent de façon inexacte. Il fallait souligner que $SO_d = f^{-1}(\{Id\}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ et que chacun des deux termes est fermé par image réciproque par une application continue d'un fermé (et que l'intersection de deux fermés et un fermé). Mais la seule utilisation de l'application déterminant ne suffisait pas pour conclure. Le fait que $\det M = 1$ pour $M \in SO_d$ ne suffit pas non plus pour conclure que SO_d est borné. Il faut pour cela observer que $||M||^2 = \mathrm{Tr}(MM^t) = \mathrm{Tr}(I_d) = d$ ou bien invoquer que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie et observer qu'un élément du groupe orthogonal en conserve la norme $||M||_2 = \sup_{||x||=1} < Mx, x >$ ce qui était bien plus long.

14a. Il s'agissait d'utiliser l'argument du fait qu'une fonction continue sur un compact (i.e. fermé et borné en dimension finie) atteint ses bornes. L'application à utiliser était $R \mapsto \sum_{i=1}^{n} |y_i - \overline{y} - R(x_i - \overline{x})|^2$ définie sur SO_d qui atteint donc son minimum. La question 12a. permet alors de découpler l'optimisation en R de celle en τ qui a déjà été traitée en 12b et donne un second membre optimisé nul. Au final, cette question assez difficile n'a été entièrement traitée que par de très rares candidats.

14b. Le plus simple était de fournir un contre-exemple en prenant $\mathbf{x} = 0$ et $\mathbf{y} = 0$. Dans ce cas, J est une application constante en R. Question globalement peu traitée.

Partie 5.

15. Question très peu traitée et technique. Il suffisait pourtant de développer le carré et de mettre de coté les termes dépendants de R de ceux n'en dépendant pas.

16. Question classique et pourtant assez mal réalisée. L'argument principal était que $S = Z^t Z$ est une matrice réelle symétrique donc diagonalisable sur une base orthonormale de vecteurs propres. De plus comme elle est positive, ses valeurs propres sont positives et on peut donc les ordonner de la plus petite à la plus grande.

17a. Question facile par calcul qui a été bien traitée.

17b. Question très peu traitée alors que le calcul dans la base adaptée se fait sans difficulté.

18. Beaucoup de candidats ont traité ces deux exemples indépendamment de leur capacité à résoudre les questions précédentes. Bien penser à présenter lisiblement les résultats en faisant attention aux signes.

19a. Question qui a été souvent essayée mais qui au final est assez subtile car il faut enchaîner les identités sur le déterminant de façon précise pour obtenir le résultat.

19b. La décomposition précédente permettait un point d'entrée sur cette question. L'utilisation de la question 3c permettait de se rapprocher de la solution mais il fallait ensuite observer que $R \mapsto V^t RU$ est bijective dans l'ensemble des déplacements pour pouvoir reparamétrer le supremum de façon similaire aux questions 10b et 10d.

20. Quelques candidats ont deviné la bonne réponse mais encore moins sont parvenus à une démonstration convaincante. La question précédente permet de maximiser à l'aide des valeurs singulières et de la trace. Ce maximum se transforme en minimum avec la question 15 permettant de répondre à la question.

Partie 6. Les questions 21.a, 21.b et 21.c ont été assez largement abordées.

21a. Le déterminant ne suffit pas pour cette question mais la préservation de la norme donne la réponse.

21b. Quelques petites manipulations sur le déterminant donnent aisément la réponse qui a été obtenue par beaucoup de candidats.

21c. L'application de la question précédente et le fait que $\det M^t = \det M$ donnait le résultat obtenu par beaucoup de candidats.

22a. Les questions précédentes montraient que -1 est une valeur propre. Il suffisait alors de compléter la base de vecteurs propres en une b.o.n. ce qui n'a pas trop posé de problème aux candidats.

22b. L'inclusion vient d'arguments sur l'orthogonal. L'injectivité et le théorème du rang sur E_1 suffit alors à obtenir l'égalité ce qui a posé plus de difficulté aux candidats.

23a. Question simple ne nécessitant que l'utilisation de la partie préliminaire.

23b, 24a, 24b, 24c, 24d, 25a, 25b, 26 : Questions quasiment peu abordées par les candidats faute de temps et nécessitant une bonne assimilation des notations par les candidats. La valeur optimale de la question 26 pouvait se deviner par celle de la question 25b et de façon similaire à la partie 5.