Composition de Mathématiques B, Filière MP
(X)

Rapport de MM. Samuel TAPIE, François VIGNERON et Michel ZINSMEISTER, correcteurs.

Cette épreuve a été plutôt réussie dans l'ensemble. Certains candidats se sont malheureusement laissés décourager par les calculs et se sont contentés de « survoler » les questions faciles du sujet ; cette attitude couplée à une rédaction laconique, était la recette du désastre.

Les notes des candidats se répartissent selon les données du tableau suivant :

$0 \leq$ N $<$ 4	57	3,53 %
$4 \leq$ N $<$ 8	446	27,58 %
$8 \leq$ N $<$ 12	649	40,14 %
$12 \leq$ N $<$ 16	362	22,39 %
$16 \leq$ N $\leq$ 20	103	6,37 %
Total	1617	100 %
Nombre de copies : 1617		
Note moyenne : 9,94		
Écart-type : 3,68		

On observe en général, une certaine désinvolture dans la rédaction. Une majorité de candidats ne prend pas la peine de justifier, ne fût-ce qu'en deux mots, le passage d'une ligne de calcul à la suivante et oublie de citer explicitement la référence correcte lorsqu'une affirmation découle d'une question précédente ou d'une hypothèse de l'énoncé.

Erreurs les plus significatives

L'énoncé invitait les candidats à vérifier spontanément la convergence de toutes les séries qu'ils rencontrent. Il est regrettable pour une majorité d'entre eux de ne pas avoir suivi ce conseil. Plus généralement, les outils de manipulation des suites et séries sont connus mais mal maitrisés et employés à tord. Par exemple, il n'est pas tolérable de court-circuiter la preuve de la convergence absolue d'une série $\sum a_n$ par

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \ldots \leq \infty$$

puisque cette écriture présume de l'existence de la série. Remplacer ∞ par N reste ambigu puisque la convergence de $\sum a_n$ n'est pas impliquée par le fait que les sommes partielles sont bornées. Le critère de convergence pour les séries alternées est très souvent appliqué de manière incorrecte en oubliant de vérifier que le terme général tend vers zéro ce qui impliquerait à tord que la série $\sum(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge.

Pour justifier l'échange série-intégrale, beaucoup appliquent mécaniquement un critère de convergence normale et/ou uniforme sans se rendre compte que la fonction $t \mapsto t^n$ sur $[0,1]$ est l'archétype du contre-exemple. Il est dommage qu'une majorité ait préféré appliquer un théorème de convergence dominée dans toute sa lourdeur (mais heureusement correct) alors que l'étude directe des sommes partielles se limitait à celle d'une série géométrique et une majoration du type :

$$\left|(-1)^n\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\omega(t)dt\right| \leq M\left(\int_0^1 t^n dt\right) = \frac{M}{n+1}$$

où M est un majorant de $|\omega(t)|$ sur $[0,1]$. Attention aussi à certains excès d'optimisme dans les énoncés : certains affirment qu'on peut « toujours » intervertir une somme finie et une intégrale, ce qui est faux puisque les deux termes de

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)dx$$

ne peuvent pas être séparés.

Les abréviations sont à éviter, même en explicitant leur signification au premier usage. Les correcteurs n'ont pas le temps de décoder les mystérieux CPM, CSSA, TSSA, CV, TAF, TCPSP, CSCVSA, TLSF,... et autres pathologies relevées cette année.

Examen détaillé des questions

Question 1a Pour $p=1$, c'est une question de cours sur la formule des accroissements finis (et non pas le théorème de Rolle) réussie par 80% des candidats. Il est malheureux qu'une majorité se soit obstinée à refuser l'indication de l'énoncé pour traiter l'hérédité de p à $p+1$ car seuls 25% obtiennent la totalité des points à cette deuxième partie. L'erreur la plus courante est l'oubli du quantificateur universel « pour toute fonction f » dans l'hypothèse de récurrence qui conduisait naturellement à l'impasse

$$(\Delta^{p+1}u)_n = (\Delta^p u)_{n+1} - (\Delta^p u)_n = f^{(p)}(x) - f^{(p)}(y) = (x-y)f^{(p+1)}(z)$$

où il est difficile d'exclure le cas $x=y$ puis justifier que le membre de droite peut se mettre sous la forme $f^{(p+1)}(t)$.

Question 1b Environ un quart des candidats fait une erreur de calcul dans cette question élémentaire. Le plus simple était d'expliciter la dérivée n$^{\text{ieme}}$ de $1/(1+x)$ en justifiant succinctement la formule.

Question 2a La formule coïncide à la définition pour $p = 1$ (encore faut-il mentionner ce cas) et l'hérédité repose sur la formule du triangle de Pascal. La question est réussie par 90% des candidats. Un calcul élégant proposé par quelques-uns consiste à appliquer le binôme de Newton dans l'algèbre des endomorphismes de l'espace des suites puisque l'identité commute avec l'opérateur de translation.

Question 2b Ici aussi, 90% de réussite avec le binôme de Newton et en vérifiant la positivité stricte.

Question 3a Environ seuls deux candidats sur trois justifient la convergence. La plupart utilisent le critère des séries alternées. Moins d'un quart fournissent une preuve décente de la valeur de la somme de la série, souvent en utilisant le théorème de convergence dominée et une page de calculs. Pourtant, la question pouvait et aurait dû être traitée par la méthode élémentaire mentionnée dans l'introduction de ce rapport. Le nombre de candidats ayant affirmé la convergence uniforme de $t \mapsto t^n$ sur $[0, 1]$ est choquant. Le fait d'ouvrir l'intervalle pour « éviter le problème » témoigne d'une incompréhension totale du concept.

Question 3b Une majorité obtient la formule

$$(-1)^p(\Delta^p u)_n = \int_0^1 t^n(1-t)^p\omega(t)dt$$

qui sera nécessaire pour la suite du problème. On peut aussi, par linéarité, faire le lien avec la question 2b.

Question 3c Cette fois, on pouvait appliquer un argument de convergence normale avec une série géométrique puisque $0 \leq \frac{1-t}{2} \leq 1/2$. Cet argument élémentaire échappe à presque tous, sauf les meilleurs. Environ 40% réussissent la question, mais souvent au prix d'un temps précieux pour la suite.

Question 3d Le plus simple était d'utiliser la formule attendue en 3b mais encore fallait-il soigner la rédaction et éviter de faire un calcul purement formel.

Question 4 On pouvait choisir $\omega = 1$ puis appliquer 3a et 3d. Un candidat sur cinq oublie de justifier la formule pour $\ln 2$. Appliquer naïvement le développement en série de $\ln(1 + x)$ sans réaliser qu'il peut y avoir un problème puisque $x = 1$ est au bord du disque de convergence est une négligence intolérable.

Question 5a Les candidats qui ont rédigé correctement 3d n'avaient qu'à se référer à cette question. Les autres perdent du temps.

Question 5b Cette première majoration était essentielle pour entrer dans l'esprit du problème. Il est regrettable qu'elle n'ait été traitée avec succès que par 20% des candidats. On pouvait exprimer la somme par 3c et conclure par un argument de décroissance en p dans l'intégrale. D'autres préfèrent utiliser leur observation que $(-1)^p(\Delta^p u)_0$ est une suite décroissante en p.

Question 6a Sans difficulté, mais la rédaction doit mettre en évidence le fait que p soit fixé est important.

Question 6b Un exercice de convergence à la Cesaro, indépendant du reste du problème. La plupart des candidats savent « couper » au bon endroit mais le contrôle des premiers termes, bien qu'indispensable, laisse souvent à désirer et seuls 20% obtiennent la note maximale. On pouvait par exemple démontrer que $\binom{p}{k} \leq p^k$. Certains oublient que la convergence de $p^k/2^p$ vers zéro n'est pas uniforme en $k \in \mathbb{N}$.

Question 7a On pouvait utiliser 2a et 6b pour traiter cette série télescopique. Trop de candidats calculent formellement et ne prennent pas la peine de vérifier la convergence, bien que ce soit le seul point important de cette question. Seul un candidat sur deux obtient la note maximale. Certains confondent limite en n et limite en p.

Question 7b La formule a dû impressionner les candidats puisque seul un sur quatre valide cette question. L'argument est pourtant similaire à 7a une fois qu'on reconnaît une série télescopique en n. On peut montrer la convergence en utilisant 6a.

Question 8a Seul un candidat sur dix démontre la formule demandée. Une étape intermédiaire possible à partir de 7b consiste à montrer que

$$E_n - S = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m+1}}{2^{n+1}} (\Delta^{n+1} u)_m$$

puis utiliser 2a et réordonner les termes.

Question 8b La moitié des candidats conclut correctement que $S = \lim E_n$ en admettant les calculs antérieurs : il suffit d'appliquer 6b au reste de la série $\sum(-1)^k u_k$ pour pouvoir passer à la limite dans la formule 8a. Certains candidats, heureusement peu nombreux, réutilisent à tord la fin de la première partie, attestant qu'ils n'ont pas compris l'enjeu du problème : les questions 3a à 5b présupposent une forme particulière pour u_n et ne sont donc pas réutilisables entre 6a et 8b.

Question 9a Le début de la troisième partie était particulièrement facile pour remettre les candidats « dans le bain » des formules de la première partie. Neuf candidats sur dix traitent 9a correctement.

Question 9b Même commentaire que 9a.

Question 10 La plupart obtiennent $\sup_{x \in [0,1]} |(1-x)^n| = 1$, souvent sans justifier.

Question 11 La plupart affirment que $\sup_{x \in [0,1]} |(1-2x)^n| = 1$ mais seul un candidat sur deux peut le démontrer correctement. La décroissance de $1-2x$ n'est pas suffisante puisque la fonction $x \mapsto |1-2x|$ est croissante à partir de $x = 1/2$...

Question 12a Le quart des candidats sait démontrer l'unicité de P_n mais seulement un cinquième prouve leur existence. Il est vrai qu'un polynome à racines simples est entièrement déterminé par ses racines et une contrainte de normalisation. Par contre, le seul fait de calculer les zéros de $\cos(2nt)$ ne suffit pas à démontrer que cette fonction est un polynome en $\sin^2 t$.

Question 12b Le résultat peut s'énoncer de deux facons puisque $(1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2}$.

Question 12c Par exemple $|S - T_n| \leq 2S(3+2\sqrt{2})^{-n}$. Seul un dixième des candidats valide cette question. Il est surprenant que certains aient la naïveté de croire que recopier la formule de l'énoncé 9b, sans avoir traité 12b, puisse leur apporter des points.

Question 13 Abordée seulement par une minorité, la quatrième partie était l'aboutissement pratique du sujet et aurait dû motiver plus de candidats. Afin de ne pas écraser la majorité des notes, les correcteurs on décidé qu'on pouvait théoriquement obtenir 20 à l'épreuve sans traiter la question 13. Cependant, les correcteurs ont eu le plaisir de constater que les candidats les plus brillants se sont efforcés de traiter l'intégralité du sujet, le plus souvent avec succès.

Attention, d'après le critère d'Abel, le reste d'une série alternée est majorée par la valeur absolue du premier terme de reste. Mais, ce n'est pas en général un équivalent du reste, même en corrigeant le signe. Par exemple, pour $t \in]0,1[$:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (-t)^n = \frac{(-t)^N}{1+t}$$

n'est pas équivalent au premier terme de reste $(-t)^N$.