Composition de Mathématiques A, Filière MP (XLCR)

Présentation du sujet

Ce sujet portait sur l'étude de la conjugaison des matrices symétriques réelles par des matrices orthogonales, étude que suggère naturellement l'énoncé du théorème spectral.

Après quelques préliminaires, le candidat était conduit dans les parties 1 et 2 à étudier le spectre d'une matrice extraite de OMO^{-1}, où M désigne une matrice symétrique et O une matrice orthogonale, toutes deux de taille $n+1$. Plus précisément, c'était la matrice extraite carrée supérieure gauche de taille n qui était considérée. Noter que, sans extraction, la question posée est triviale, les matrices M et OMO^{-1} ayant même spectre.

L'objectif commun à ces deux parties était d'aboutir au résultat établi à la question 11-b : si les valeurs propres de M sont toutes distinctes, les spectres obtenus lorsque O parcourt le groupe orthogonal sont exactement les n-uplets enlacés avec le spectre de M.

Dans les parties 3 et 4, il s'agissait non plus d'extraire et appréhender les propriétés spectrales mais de comprendre les coefficients diagonaux de la matrice conjuguée. Une attention particulière était accordée aux cas de la dimension deux (partie 3) et de la dimension trois avec trace nulle (partie 4).

Dans les mathématiques qu'il demandait de mobiliser, ce sujet était transverse. Il faisait en particulier intervenir de l'arithmétique sur l'anneau des polynômes, de l'algèbre linéaire, de la géométrie plane et de l'analyse des fonctions continues ou dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Commentaires généraux

La considérable étendue du spectre mathématique que ce sujet demandait de mettre en application a posé de nombreuses difficultés aux candidats. Le traitement mathématique des questions ardues, mais aussi de certaines questions simples, était souvent trop approximatif.

La qualité de la rédaction était généralement médiocre. Les correcteurs tiennent à rappeler qu'une rédaction claire et structurée ainsi qu'une présentation adéquate des résultats sont des qualités importantes pour une copie, ou n'importe quelle démonstration mathématique. Ces facteurs ne doivent pas être négligés. La précision de l'argumentation a naturellement été prise en compte par les correcteurs dans leur notation : toute hypothèse utilisée, tout argument employé *doit* laisser une trace sur la copie, à l'endroit où il ou elle intervient. Certains candidats sont parvenus à concilier précision et concision ; cela était évidemment à leur avantage.

Enfin, on a retrouvé certaines erreurs classiques dans un grand nombre de copies, ce qui témoigne d'un recul insuffisant sur le programme de la part de nombreux candidats.

On rappelle que les questions sont dotées d'un coefficient d'autant plus fort qu'elles sont difficiles.

La répartition des notes des candidats français de l'École polytechnique est la suivante :

$0 \leq \mathrm{N} < 4$	46	3,02 %
$4 \leq \mathrm{N} < 8$	530	34,75 %
$8 \leq \mathrm{N} < 12$	702	46,03 %
$12 \leq \mathrm{N} < 16$	214	14,03 %
$16 \leq \mathrm{N} \leq 20$	33	2,16 %
Total	1525	100 %
Nombre de copies : 1525		
Note moyenne : 9,06		
Écart-type : 3		

Examen détaillé des questions

Dans le préambule, $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{R})$ était prétendu désigner « l'espace vectoriel des matrices à r lignes et n colonnes à coefficients complexes » ; il s'agissait bien entendu des telles matrices à coefficients *réels*.

Questions préliminaires

Les questions préliminaires ont été traitées par la grande majorité des candidats.

Question 1-a : Répondre à cette question revient simplement à vérifier les propriétés définissant un sous-groupe. Que cela soit facile ne dispense en aucun cas de le faire correctement : il s'agit de vérifier que $O_n(\mathbb{R})$ – tel que défini dans le préambule – est bien une partie de $GL_n(\mathbb{R})$, que cette partie est non-vide, qu'elle est stable par produit matriciel et qu'elle est stable par passage à l'inverse.

Attention, la formule ${}^t(MN) = {}^tM{}^tN$ n'est pas vraie en général : c'est l'égalité ${}^t(MN) = {}^tN{}^tM$ qui est toujours valide.

On se rappellera que si M et N sont des matrices carrées telles que $MN = I$, alors M et N sont inversibles et inverses l'une de l'autre, si bien qu'en particulier $NM = I$. On a apprécié, lorsque ce fait était utilisé, qu'il fasse l'objet d'une mention explicite de la part du candidat.

Bien sûr, $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas un groupe pour l'addition matricielle – et en particulier n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 1-b : Il suffisait de montrer que $O_n(\mathbb{R})$ était fermé et borné, puis d'invoquer le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

On pouvait utiliser sans le redémontrer le fait que l'application $M \mapsto \sqrt{\mathrm{tr}({}^tMM)}$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Ne pas oublier la racine.

S'il est vrai que l'image d'un compact par une application continue est compacte et que l'image réciproque d'un fermé par une application continue est fermée, il est faux en général que l'image réciproque d'un compact par une application continue est compacte.

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors $\det(M) = \pm 1$, mais la réciproque est fausse en général.

L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas borné.

Question 2 : Le sens direct provient de l'invariance du polynôme caractéristique par similitude tandis que le sens réciproque découle du théorème spectral. Ce théorème utilise l'hypothèse de symétrie portant sur M et N, et cela devait faire l'objet d'une mention explicite de la part du candidat.

Il faut avoir conscience du fait que lorsqu'on orthodiagonalise une matrice symétrique réelle, ses valeurs propres peuvent ne pas être rangées par ordre décroissant, mais qu'on peut toujours s'arranger pour que ce soit le cas.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, deux matrices peuvent avoir même polynôme caractéristique sans être semblables pour autant.

Prendre garde de ne pas prendre une matrice pour son inverse lors des changements de base.

Question 3 : Attention, s'il est vrai que $\lambda_k > \lambda_l \Longrightarrow k < l$, on peut avoir $\lambda_k \geq \lambda_l$ sans avoir $k \leq l$.

On a apprécié lorsque les candidats traitaient convenablement les cas « dégénérés » tels que $i = 0$.

Première partie

A l'exception des questions 5-c, 7-a et 7-b, cette partie a été traitée par de nombreux candidats.

Question 4-a : Il ne fallait pas oublier de vérifier que les éléments de la famille considérée appartenaient bien à $\mathbb{R}_n[X]$.

Par un argument de dimension, on pouvait être amené à établir que la liberté ou le caractère générateur de la famille étudiée. Cela a été remarqué par un grand nombre de candidats.

Attention à ne pas confondre un polynôme et la valeur prise par ce dernier en un nombre réel donné.

Question 4-b : Cette question facile a été abondamment traitée.

Point lexical : on ne parle pas de « terme » d'un produit mais de « facteur ».

Question 5-a : On pouvait utiliser la division euclidienne des polynômes ou bien décomposer le polynôme $P - XQ_0$ dans la base de la question 4-a.

L'unicité devait être convenablement rédigée. Dire qu'à chaque étape de la construction, on avait existence et unicité ne constituait pas une rédaction pleinement satisfaisante car on pourrait envisager d'autres constructions.

Les arguments de degré ou de coefficient dominant devaient être explicites.

Il s'agit de ne pas confondre les polynômes de degré k et les polynômes de degré *au plus* k.

Question 5-b : Cette question, un peu moins traitée que les précédentes, se traitait à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires. Pour obtenir les deux dernières racines, il fallait étudier le comportement de P en $\pm\infty$.

On attendait une invocation explicite du théorème des valeurs intermédiaires ou de la continuité de P. Ne pas confondre le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème de Rolle.

Question 5-c : Cette question subtile a été nettement moins (bien) traitée que les précédentes. Il s'agissait d'employer conjointement la constance du signe de P sur les intervalles délimités par ses racines successives (théorème des valeurs intermédiaires), l'enlacement *strict* de $\hat{\lambda}$ et $\hat{\mu}$, le changement de signe de P au voisinage de chacune de ses racines et la question 4-b pour démontrer que tous les α_j étaient du même signe strict. Le changement de signe de P au voisinage de ses racines devait être justifié : les λ_j sont des racines *simples* de P. Il suffisait ensuite d'établir que le signe commun des α_j était positif, par exemple en étudiant le comportement de P en $+\infty$.

Les candidats ayant remarqué que $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ ont pu court-circuiter la démonstration suggérée au paragraphe précédent et se ramener à une réponse analogue à celle développée à la question 4-b.

Question 6 : On pouvait raisonner en recourant à la décomposition d'un polynôme en produit de polynômes irréductibles ou en procédant par double divisibilité.

Si P divise Q et Q divise P, alors P peut s'écrire sous la forme λQ pour un certain nombre réel non-nul λ. Si *de plus* P et Q ont *même* coefficient dominant, alors $P = Q$.

Attention, les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ ne sont pas tous de degré 1.

Le polynôme $X^2 + 1$ et lui-même n'ont pas de racine (réelle) en commun mais ne sont pas premiers entre eux.

Question 7-a : Cette question a été nettement moins abordée que la question 6. Elle n'était pas substantiellement plus difficile que cette dernière, seulement la possible annulation des α_j et le fait que la réponse n'était pas fournie par le sujet laissaient moins la possibilité aux candidats de répondre de façon floue. Répondre de façon satisfaisante à cette question témoignait d'une bonne maîtrise de la notion de PGCD de deux polynômes, et a été dûment récompensé.

Question 7-b : Cette question était difficile et a été peu abordée : cela est à la fois dû à son caractère synthétique et au fait qu'elle exigeait d'avoir traité la question 7-a. Il s'agissait de remarquer que $P \wedge Q_1$ était scindé (d'après la question 7-a) et que le quotient de P par ce polynôme l'était également (d'après la question 5-b).

Deuxième partie

Les questions 8 et les sous-questions de la question 9 ont été abordées par un grand nombre de candidats. Les questions suivantes ont été nettement moins abordées.

Question 8 : L'écrasante majorité des candidats a trouvé, sujet aidant, les valeurs de U et V qui conviennent. Mais trop de candidats ne savent pas rédiger correctement une démonstration par analyse-synthèse : partir du principe que U et V vérifient la relation souhaitée et en déduire que $U = A^{-1}B$ et $V = D - CA^{-1}B$ ne répond *pas* à la question ! Il faut *vérifier* que ces valeurs conviennent.

La formule $\det(M) = \det(A)\ \det(D) - \det(B)\ \det(C)$ n'a aucun sens si $r \neq s$. Si $r = s \geq 2$, cette formule a un sens mais est fausse en général. Les formules $\det(M) = \det(A)\ \det(D) - \det(BC)$ et $\det(M) = \det(A)\ \det(D) - \det(CB)$ ont toujours un sens mais sont fausses en général.

Question 9-a : Il s'agit essentiellement d'orthodiagonaliser A.

Le a apparaissant dans UM^tU est le même que celui qui apparaît dans l'écriture par blocs de M.

Question 9-b : Cette question se traitait assez directement en utilisant la version admise de la question 8. Il était également possible, bien que plus fastidieux, de procéder par développement de déterminants. Il fallait dans ce cas détailler proprement le développement effectué. Enfin, certains candidats ont traité cette question en recourant à la question 8 mais pas au fait admis à la suite de cette dernière.

Question 9-c : Il suffisait d'appliquer le fait admis à la fin de la première partie. On ne pouvait pas appliquer ici le résultat démontré à la question 5-b.

Question 10 : Cette question était difficile, la continuité de l'application qui a un polynôme réel unitaire scindé de degré n associe le n-uplet ordonné de ses racines étant hors-programme. Certains candidats ont réussi à la traiter de façon pleinement satisfaisante. Ces derniers ont impressionné le jury et ont été récompensés.

On a également apprécié et récompensé l'honnêteté des candidats qui reconnaissaient avoir besoin de cette continuité sans savoir l'établir.

Le spectre de $M_{\leq n}$ n'est en général pas un sous-n-uplet de $\mathrm{Sp}(M)$. La situation est bien plus subtile. Elle est assez bien capturée par le résultat démontré à la question 11-b, qui est d'ailleurs l'objectif des questions 1 à 11-b. L'erreur consistant à penser que le spectre d'une matrice extraite est un sous-uplet du spectre a également été commise par certains candidats à la question 13.

Le spectre ne dépend pas linéairement de la matrice symétrique considérée (dès que la taille des matrices étudiées est supérieure ou égale à 2).

Question 11-a : Cette difficile question de synthèse a été très peu abordée. Il s'agissait d'employer conjointement la question 2, la question 5-c et le calcul de la question 9-b.

Question 11-b : Pour l'inclusion de $\mathcal{C}_M$ dans l'ensemble de droite, il suffisait d'utiliser la question 9-c et l'invariance du spectre par conjugaison. Pour l'autre, on pouvait passer à l'adhérence (d'après la question 10) l'inclusion établie à la question 11-a. Cela passait par un argument de densité qu'il s'agissait de rédiger soigneusement. Cette question a rarement été bien traitée.

Troisième partie

Question 12 : En utilisant le théorème spectral et la question 1-b, on pouvait se ramener au cas où la matrice M était diagonale.

Ne pas confondre $O_2(\mathbb{R})$ et le groupe $SO_2(\mathbb{R})$: une matrice orthogonale de taille 2 n'est pas forcément une matrice de rotation.

Chacune des deux inclusions entre $\mathcal{D}_M$ et le segment considéré devait être établie.

L'image par une application continue d'une partie connexe par arcs est connexe par arcs, mais elle n'est pas forcément convexe !

On pouvait exploiter l'invariance par conjugaison de la trace pour démontrer que $\mathcal{D}_M$ était inclus dans la droite $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = \lambda_1 + \lambda_2\}$.

Question 13-a : Cette question a été fréquemment traitée. Il s'agissait de remarquer qu'on avait ici un cas d'égalité, la trace étant invariante par conjugaison.

S'il est vrai que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, il n'est pas pour autant toujours vrai que $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$.

Question 13-b : Il suffisait d'appliquer la question 13-a à $M_{\leq n}$ puis d'utiliser la question 9-c.

Question 13-c : Cette question était difficile et a été peu traitée. On ne pouvait se contenter d'un simple « par récurrence immédiate ». L'hypothèse de récurrence devait être clairement formulée, quantificateurs à l'appui. L'initialisation et l'hérédité devaient être rédigées proprement.

Quatrième partie

Les questions 14-a à 15-b ont été abordées par une proportion faible mais encore significative de candidats. Les autres n'ont été que rarement abordées.

Question 14-a : Le vecteur ω_1 est un vecteur de la base canonique, ce qui rendait les calculs relativement faciles. Il suffisait essentiellement de se rappeler la définition d'une symétrie orthogonale pour être en mesure de traiter cette question.

Question 14-b : Cette question était plus difficile que la précédente, ω_2 n'étant pas un vecteur de la base canonique. Il fallait avoir bien assimilé la notion de symétrie orthogonale pour pouvoir répondre à cette question.

Certains candidats ont *manifestement* écrit en guise de démonstration une suite d'assertions qui les arrangeait, partant en réalité de la conclusion fournie par l'énoncé plutôt que de ses prémisses. Ce comportement a été pénalisé, la malhonnêteté étant plus grave que l'ignorance ou l'erreur.

Question 15-a : Le caractère linéaire de φ devait être convenablement justifié. On pouvait considérer comme acquis le fait que H est un espace vectoriel.

Il s'agissait de démontrer que φ est bijectif. Si on justifiait convenablement l'égalité de dimension entre les espaces vectoriels de dimension finie E et H, on pouvait se contenter d'établir l'injectivité ou la surjectivité de φ.

Si on n'a pas encore démontré que φ est linéaire, il ne suffit pas d'établir que $\varphi(m) = 0 \implies m = 0$ pour prouver que φ est injective.

Le noyau d'une forme linéaire *non-nulle* est un hyperplan.

Question 15-b : Cette question relevait de la simple vérification. Le vecteur m devait bien être pris dans H, pas dans $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Question 15-c : Cette question difficile a été très rarement abordée. Aucun candidat n'y a répondu de façon complète.

Question 16-a : Le fait à établir découle de ce que les matrices de permutation sont orthogonales. Ecrire la démonstration détaillée requérait de la part du candidat qu'il maîtrise bien les matrices de permutation : il fallait veiller à ne pas confondre lignes et colonnes, ou une matrice et son inverse.

Question 16-b : Cette question facile n'a pas posé de problème aux rares candidats l'ayant abordée.

Question 16-c : On pouvait déduire le second point du premier et de la question 16-a. La question 16-c ne présentait pas de difficulté particulière. C'est la dernière question à avoir été intégralement traitée par au moins un candidat.

Question 16-d : Personne n'a répondu de façon satisfaisante à cette question difficile.

Question 16-e : Cette question était très difficile. Aucun candidat n'a fait plus que l'effleurer.