Question 6. Les correcteurs ont été surpris par le grand nombre de copies dans lesquelles figuraient les arguments suivants : un produit de variables aléatoires admettant une espérance, admet une espérance, la linéarité de l'espérance donne que l'espérance d'un produit est le produit des espérances. L'espérance d'une constante est nulle. Bien sûr, tous ces arguments sont incorrects.

Question 7. Question très inégalement traitée ; seul le dernier point est généralement correct.

Question 8. L'inégalité est rarement prouvée. En revanche l'application à la variable aléatoire est souvent juste.

Question 9. Il suffisait ici de combiner les résultats des questions précédentes.

Question 10. Cette question est abordée dans presque toutes les copies. La dérivation d'un produit est parfois égale au produit des dérivées. La donnée d'un tableau de variation est nettement préférable à un long discours filandreux. La seconde partie de la question n'est pas toujours convaincante.

Question 11. La première partie de l'étude est rarement correcte. La suite est peu abordée.

Question 12. On trouve souvent l'assertion : $\lfloor x \rfloor$ est équivalent à $\lfloor x \rfloor + k$, ce qui est vrai, donc $\lfloor x \rfloor !$ est équivalent à $(\lfloor x \rfloor + k)!$, ce qui est faux.

Question 13. Dans la plupart des copies traitant cette question, on invoque la décroissance de la suite, ce qui contredit le résultat de Q10.

Question 14. Peu de réponses correctes.

Question 15. Cette question est souvent abordée et correctement traitée dans une moitié des copies.

Questions 16 et 17. Peu de réponses satisfaisantes à ces questions.

Question 18. La majorité des candidats aborde cette question. La suite (c_n) n'est pas toujours explicitée. Le rayon de convergence de la série entière est rarement étudié.

Question 19. La formule de Stirling est souvent citée et parfois utilisée à bon escient.

Question 20. Quelques bonnes réponses à cette ultime question.

1.7. Mathématiques II — PSI

Généralités

Le sujet portait sur le classique problème des moments pour une densité de probabilité sur un intervalle de $\mathbb{R}$. La question relève du domaine des probabilités, cependant elle était présentée dans un cadre purement analytique vu l'absence des lois à densité du programme de la filière PSI.

Le sujet proposait essentiellement :

- De faire calculer les moments de deux densités classiques : une densité exponentielle (question 1) et la densité gaussienne réduite (questions 2 à 4).
- De montrer que deux densités de probabilité sur $[0, 1]$ sont égales dès qu'elles ont les mêmes moments (théorème des moments sur un segment, établi dans la partie III).
- De donner un exemple illustrant le fait que ce résultat ne tient plus sur un intervalle non borné : en fin de partie V on met en évidence deux densités de probabilité f et g distinctes sur $\mathbb{R}^+$ ayant les mêmes moments (on peut même produire une quantité indénombrable de telles densités en considérant les fonctions de la forme $(1 - t)f + tg$ avec $t \in [0, 1]$).

Pour établir le théorème des moments sur un segment, le sujet proposait une méthode très classique passant par le théorème de Weierstrass polynomial, qui stipule que toute fonction numérique continue sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. En admettant que toute fonction continue sur un segment soit uniformément continue (résultat hors programme en filière PSI), la démonstration était fondée sur une utilisation des polynômes de Bernstein écartant leur interprétation probabiliste.

Le sujet était d'une longueur modérée, et il a été entièrement traité par plusieurs candidats. Les questions faisaient la part belle à l'analyse des intégrales, plus particulièrement des intégrales généralisées. Les techniques d'intégration par parties et de changement de variable sur un intervalle quelconque étaient régulièrement mises à contribution. La partie IV mettait en jeu les méthodes d'étude d'intégrales à paramètre pour déterminer la transformée de Fourier d'une densité gaussienne (le résultat admis à la question 18 aurait pu être démontré avec la même idée, au prix d'une domination plus délicate dans la dérivation sous l'intégrale).

La plupart du temps, les candidats ont abordé toutes les parties du sujet. Les questions les moins traitées sont la 5, les 10 et 11, et la 22.

Compte tenu de la brièveté du sujet, le jury s'étonne de la mauvaise qualité générale de rédaction et de présentation des copies. Parmi les défauts constatés :

- Beaucoup de candidats ne soulignent ni n'encadrent aucune étape clef de leur raisonnement ; beaucoup aussi ne font pas d'effort sur la mise en page, ce qui ne facilite pas l'identification des étapes du raisonnement par le correcteur.
- Des imprécisions qui finissent par convaincre le correcteur d'un manque criant de rigueur mathématique : par exemple $<$ au lieu de $\leq$, la non-justification des intégrations par parties ou changements de variable par la donnée des fonctions utiles et de leur propriété. Le candidat a tout à gagner à connaître les hypothèses de chaque théorème (pas besoin de caractère bijectif pour une intégration par parties).
- L'usage d'un résultat établi précédemment dans l'énoncé doit systématiquement être appuyé par une référence explicite à la question où il apparaît. En particulier, à la question 14 trop de candidats concluent directement grâce aux résultats précédents

qu'on a $\int_0^1 (f-g)^2 = 0$, alors que l'on attendait un découpage clair de l'argumentation et que parmi les démonstrations, certaines s'avèrent incorrectes. Il n'est donc pas possible d'attribuer les points en l'absence de raisonnement étayé.

- Beaucoup de candidats font un usage horripilant d'acronymes incompréhensibles (d'après le TICL on a 11…), de notations hors programme ($f \in L(R)$, *C-difféomorphisme*), et de mélanges français/mathématiques particulièrement irritants (que comprendre à l'affirmation f est $C^0(R)$?). Il est bien sûr autorisé, voire souhaitable, de définir les notations (mais pas d'abréviation !) qui ne figurent pas au programme et pourraient simplifier l'écriture des démonstrations : encore faut-il faire l'effort de le faire ! Enfin, bon nombre de candidats oublient régulièrement d'insérer des parenthèses lorsque c'est nécessaire : on peut lire souvent $2p.2p - 2.2p - 4...2$.
- Trop peu d'affirmations sont explicitées convenablement, en particulier dans les hypothèses des théorèmes sur les intégrales à paramètre. En particulier, on lit trop souvent : $t \rightarrow h(\xi,t)$ est continue par morceaux sans préciser que c'est vrai pour n'importe quel réel ξ.
- La confusion entre une fonction et une expression est déjà assez irritante (les élèves démarrant leur copie par $g(x)$ est continue et positive ne mettent pas les correcteurs dans les meilleures dispositions) ; elle devient rédhibitoire lorsqu'il s'agit de manipuler des fonctions de plusieurs variables (que comprendre à l'énoncé brut $h(x, t)$ est continue par morceaux lors de la vérification des hypothèses du théorème de continuité sous l'intégrale ?).
- Certains candidats tentent de passer en force sur de nombreuses questions, les correcteurs ne sont pas dupes et sont irrités de cette attitude qui n'incite pas à la clémence en cas de doute sur d'autres questions. Ils espèrent néanmoins que les candidats ne sont pas convaincus par ce qu'ils ont écrit.
- Enfin, il faut soigner les citations des théorèmes ou résultats du cours : on trouve trop souvent des noms ambigus sans énoncé clair, comme "petite formule", "formule du capitaine" (propriétés des coefficients binomiaux), "théorème aux 4 hypothèses" (théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre), "théorème des 3 conditions" (une fonction continue positive d'intégrale nulle sur un intervalle non réduit à un point est nulle sur cet intervalle); ou des citations inappropriées, comme "théorème de la double limite" pour l'interversion limite-intégrale, "théorème de Cauchy-Schwarz" pour l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Détail des questions

Question 1. L'intégrabilité n'est pas à prouver, puisque c'est du cours. En revanche, la valeur de l'intégrale ne l'est pas. L'existence des moments est souvent mal traitée : on ne dit pas : $x \rightarrow x^n g(x)$ est intégrable en $+\infty$, mais sur $[0, +\infty[$. On peut déplorer que dans quelques copies, $x \rightarrow 1/x^2$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$, voire sur $\mathbb{R}^+$.

Question 2. Dans trop de copies, on voit parachuter la négligeablité de $x^n\ \phi(x)$ devant $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$. Il faut le justifier par recours aux croissances comparées usuelles. Un nombre non négligeable de candidats font l'erreur de considérer l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ et non sur $\mathbb{R}$.

Question 3. « L'intégrale convergente d'une fonction impaire sur un intervalle centré est nulle » n'est pas du cours. Il faut donc le démontrer et il est pertinent de procéder à un changement de variable. La plupart des candidats expriment m_{2p+1} en fonction de m_{2p-1} et en déduisent m_{2p+1} en fonction de m_1 puis montrent que $m_1 = 0 = m_{2p+1}$. C'est correct, mais plus long.

Question 4. L'intégration par parties utilisée pour relier m_{2p} à m_{2p-2} est trop souvent mal (ou trop tardivement) justifiée. Il faut s'assurer que le crochet admet des limites finies aux bornes de $\mathbb{R}$ avant d'écrire tout lien numérique entre les deux intégrales.

Question 5. Cette question est souvent évitée. Parmi les candidats qui l'ont abordée, la moitié fournit un bon exemple, l'autre lit mal l'énoncé qui demande une densité sur $\mathbb{R}$ et non $\mathbb{R}^+$ ou $[1, +\infty[$.

Question 6. Il s'agit d'une question traitée par la quasi-totalité des candidats.

Question 7. Cette question peut être traitée de plusieurs façons, par l'algèbre, l'analyse ou les probabilités. Attention à ne pas écrire $(k-1)!$ pour $k = 0$. Le recours au résultat de la question 6 doit être plus clair dans de nombreuses copies.

Question 8. La plupart des candidats utilise correctement l'égalité $k^2 = k(k-1)+k$, mais on rencontre souvent les mêmes problèmes que dans la question 7.

Question 9. Une grande majorité des candidats obtient l'expression correcte $nx(1-x)$. La constante optimale $C = 1/4$ doit être justifiée. Toute constante $C \geq 1/4$ est acceptée à condition qu'elle soit également justifiée.

Question 10. Cette question est moins abordée en général. Les candidats qui pensent à utiliser Q6 pour décomposer $B_n(x) - f(x)$ en une somme s'en sortent bien, à condition de bien justifier chaque étape de la majoration. On déplore dans certaines copies le bluff qui consiste à parvenir au majorant attendu de manière malhonnête.

Question 11. Il s'agit d'une question plus délicate. Les candidats qui pensent à faire valoir Q9 mènent le raisonnement à son terme.

Question 12. Cette question peut être traitée très rapidement en invoquant la linéarité de l'intégrale. On rencontre trop souvent des raisonnements alambiqués, voire erronés. Le sujet précise que P est une fonction polynomiale, donc n'est pas - a priori – monomiale. On trouve de grossières erreurs de logique : "La propriété est vraie pour tout monôme X^n, or X^n est un polynôme, donc la propriété est vérifiée pour tous les polynômes !".

Question 13. Cette question est presque toujours mal traitée. Le plus simple est l'usage du théorème d'intégration terme à terme d'une suite de fonctions continues convergeant uniformément sur le segment $[0, 1]$. Mais il faut alors démontrer la convergence uniforme de la suite $((f-g)P_n)$ et ne pas se contenter de celle de (P_n). Beaucoup de candidats vérifient des hypothèses sur une suite de fonctions et appliquent le résultat à une autre.

Question 14. Il manque souvent l'hypothèse de continuité de la fonction $(f-g)^2$. On attend une vraie preuve de la nullité de $\int_0^1 (f(t) - g(t))^2\, dt$. Un laconique "d'après les questions précédentes" ne sauraient convaincre, d'autant que certains pensent qu'une limite de fonctions polynomiale est polynomiale malgré le résultat de Stone-Weierstrass précédemment démontré.

Question 15. Il suffit de démontrer que φ^ est continue via le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Cette question est en général bien traitée. Il ne faut pas oublier de mentionner que la fonction dominante φ est continue par morceaux, positive et intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après l'énoncé.

Question 16. Il manque souvent une ou plusieurs hypothèses de régularité au théorème de dérivabilité attendu ici. Certains candidats confondent les variables et dérivent parfois par rapport à t. La domination doit être celle du module de la dérivée partielle par rapport à ξ et être réelle positive et intégrable sur $\mathbb{R}$. Il n'existe pas d'ordre dans l'ensemble des nombres complexes !

Question 17. L'intégration par parties qui permet de relier φ^' à φ^ doit être renseignée. En particulier, pour montrer que le crochet tend vers 0 aux bornes de $\mathbb{R}$, il convient, par exemple, de montrer que son module tend vers 0.

Question 18. La résolution de l'équation différentielle obtenue en question 17 est rarement bien quantifiée. La constante, a priori complexe, doit être indépendante de ξ. Certains candidats vérifient même que la fonction proposée est bien solution et que, par unicité, c'est celle-ci. Le théorème de Cauchy-Lipschitz nécessite une condition de bord (ici φ^' $(0) = 1$) et une hypothèse de continuité des coefficients.

Question 19. La positivité ne pose pas de problème aux candidats. En revanche, la continuité est souvent mal traitée. On lit trop souvent que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 (mais elle y est déjà définie !). Quant au calcul de la limite de f en 0 ou la négligeabilité de f devant $1/x^2$ au voisinage de $+\infty$, ils ne sont que très rarement bien prouvés. A noter également que le changement de variable qui permet de relier l'intégrale de f à celle de φ, est précipité et mal rédigé. Il faut mentionner les deux intervalles d'intégration en bijection C^1.

Question 20. Le texte suppose que I_n est une intégrale convergente. Mais l'intégrale complexe de cette question doit être étudiée avant toute manipulation (changement de variable identique à la question précédente), ou alors on précise qu'il s'agit de $\varphi\hat{}(2\pi - in)$, donc d'une intégrale convergente.

Question 21 - Le bon usage de Q18 est fréquent, mais le calcul du nombre complexe $-(2\pi - in)^2/2$ est source de trop nombreuses erreurs.

Question 22 - Cette question est souvent partiellement abordée. A noter qu'il n'est pas demandé de fournir toutes les valeurs de α vérifiant les conditions indiquées. Autrement dit, fournir un intervalle non trivial comme $]0, 1]$ ou bien l'union $[-1, 1] \cup \{0\}$ et vérifier, par des références explicites à des questions précédentes, qu'il convient est suffisant.

Cette année encore, le jury a eu à déplorer de nombreuses lacunes dues à un manque de rigueur des candidats. Parmi celles-ci, on peut citer :

- un manque d'interrogation systématique de l'existence des objets considérés ;
- les hypothèses nécessaires à l'application du théorème de changement de variable ou d'intégration par parties sont presque toujours absentes ou partielles ;
- les théorèmes de régularité des intégrales à paramètre sont souvent connus approximativement. Soit il manque une hypothèse, soit il y a confusion entre la variable d'intégration et le paramètre;

- plus d'un tiers des candidats affirme sans sourciller que ≪$1/x^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ≫ ;
- beaucoup de candidats font des erreurs systématiques sur les manipulations d'inégalités. Ces questions apparemment anodines ont très souvent fait le tri entre les meilleurs candidats et les autres.