Le reste du problème a été abordé de façon anecdotique.

Conclusion : Ce problème traitait d'une question mathématique vivante (la vitesse de convergence vers 0 de det($M^{(2)}$) est un problème ouvert, sujet de recherche actif). Conçu de sorte que les 20 premières questions permettent, de façon progressive, de tester les candidats sur des points fondamentaux du programme des CPGE, nous pensons que cet objectif a été atteint : néanmoins il nous a semblé que de nombreux candidats ont été déroutés par le sujet qui, il est vrai, sort un peu des sentiers battus.

Nous voulons donc conclure par un certain nombre de conseils aux candidats :

1) Il est très important que les notions de base, apprises notamment en première année, soient parfaitement assimilées.
2) Il faut soigner la rédaction des questions du début, et notamment la première, l'objectif devant être la clarté.
3) Les correcteurs notent avec plaisir que les « passages en force » que l'on pouvait observer il y a quelques années ont tendance à disparaître, mais ils regrettent en même temps que ce phénomène semble s'accompagner d'un manque de combativité : les candidats semblent abandonner un peu trop vite une question et hésiter à admettre une question pour mieux rebondir sur les suivantes.
4) En tout état de cause, il est fortement conseillé de chercher à "rentrer" dans le sujet, quitte à perdre un peu de temps pour se faire une idée globale du sujet et éviter d'avoir « le nez dans le guidon ».

1.2.6. Mathématiques II — PSI

- Remarques générales

Le sujet proposait l'étude d'une intégrale à deux paramètres, appelée transformée d'Ornstein-Ulhenbeck, définie pour chaque fonction à croissance lente. On étudiait en particulier sa continuité et sa dérivabilité selon chaque variable. Moyennant un résultat délicat admis (le théorème 1 de l'énoncé), on utilisait dans la dernière partie cette transformée pour établir une version quantitative du célèbre théorème central limite. Rappelons que ce dernier stipule que, pour une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées et ayant un moment d'ordre 2, la suite des centrées réduites des sommes partielles converge en loi vers une gaussienne centrée réduite. Ici, on se limitait à des variables ayant toutes un moment d'ordre 3, et on examinait la convergence de la suite de terme général **E**(*f(Rn)*), où R_n est la centrée réduite de la somme partielle d'ordre n, vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} f(x)e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$$

sous réserve que f soit de classe C et que toutes ses dérivées successives d'ordre inférieur ou égal à 3 soient bornées. Dans cette situation nettement plus précise que celle envisagée dans la définition de la convergence en loi, on trouvait une majoration explicite de l'écart entre le terme général de la suite et sa limite (question 21).

Le sujet mobilisait cette année les connaissances en analyse et en probabilités des programmes de première année PCSI et deuxième année PSI. Il exigeait des candidats une solide maîtrise des grands théorèmes du cours sur les intégrales à paramètre et les intégrales impropres, dans des situations particulièrement techniques. En grande majorité, les candidats ont traité de manière relativement correcte les questions 1 à 7 et ont abordé avec beaucoup moins de rigueur et de précision les questions 8 à 16. Signalons qu'un candidat répondant consciencieusement aux 10 premières questions avait déjà une excellente note.

Le jury tient à signaler que la présentation et la graphie des copies sont en net recul vis-à-vis des années précédentes. Beaucoup de candidats se permettent d'utiliser des abréviations ; et parmi ces candidats beaucoup aggravent leur cas en n'expliquant jamais ce qu'elles recouvrent. Par ailleurs, rappelons que des sanctions sont envisagées lorsque $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sont utilisés à mauvais escient. De manière analogue, les mentions du type ≪ f (x) est continue ≫ sont en général sanctionnées — c'est une formulation incorrecte qui assimile une fonction à son expression — et affirmer ≪ f (x, t) est continue ≫ est tout simplement dénué de sens – de quelle fonction parle-t-on ? La fonction en x (à t fixé)? en t (à x fixé)? du couple (x,t)?

Lorsqu'ils invoquent le théorème de continuité sous l'intégrale, trop de candidats mettent la variable d'intégration et le paramètre sur le même plan, en invoquant une continuité par rapport à chacun d'entre eux. Il est cependant très dangereux de confondre l'hypothèse d'intégrabilité locale par rapport à la variable d'intégration (la continuité par morceaux) avec celle de continuité par rapport au paramètre (que l'on ne saurait affaiblir !). En temps normal, les candidats doivent être avertis qu'ils s'exposent à une légère sanction. Ici, compte tenu de la haute technicité exigée dans les dominations, le jury a jugé préférable d'épargner les candidats fautifs, mais il n'en sera pas nécessairement de même à l'avenir.

Cette année, le jury a eu à déplorer de nombreuses lacunes dues à un manque de rigueur des candidats. Parmi celles-ci, on peut citer :

- un manque d'interrogation systématique de l'existence des objets considérés ;
- les hypothèses nécessaires à l'application du théorème de changement de variable ou d'intégration par parties sont presque toujours absentes ou partielles ;
- les théorèmes de régularité des intégrales à paramètre sont souvent connus approximativement. Soit il manque une hypothèse, soit il y a confusion entre la variable d'intégration et le paramètre ;
- plus d'un tiers des candidats affirme sans sourciller que ≪ $1/_{x^2}$ est intégrable sur R ≫ ;
- les probabilités sont éludées par trop de candidats, et quand ce n'est pas le cas, les définitions et concepts sont rarement maîtrisés ;
- beaucoup de candidats font des erreurs systématiques sur les manipulations d'inégalités. Ces questions apparemment anodines ont très souvent fait le tri entre les meilleurs candidats et les autres.

Dans l'ensemble, le jury est fortement déçu des capacités de rigueur des candidats, ainsi que du manque de maîtrise des notions testées, et plus particulièrement en probabilités.

Détail des questions

Question 1 - Trop de changements de variables sont annoncés sous la forme t = b + t(a − b), et trop souvent aucune hypothèse n'est vérifiée ni mentionnée.

Question 2 - Les candidats confondent limite et continuité. Il n'est pas rare d'apprendre que ≪ l'exponentielle est continue en +∞ ≫. Par ailleurs, précisons que le jury attend une utilisation précise du théorème de croissance comparée (à l'aide d'un changement de variable par exemple).

Question 3 - Si on peut tolérer que le candidat omette dans la question 1 la vérification du caractère C^1 bijectif du changement de variable, cette vérification est indispensable ici, même si le changement de variable est proposé dans le sujet. En particulier, parler de bijection n'a de sens que si les intervalles de départ et d'arrivée sont précisés. D'autre part, l'existence même de l'intégrale n'est pas acquise, il faut la démontrer. Enfin signalons que les intégrales faisant apparaître un mélange de *t* et θ n'ont pas de sens et qu'il est très étonnant que bon nombre de candidats n'hésitent pas à donner un résultat négatif alors qu'il s'agit d'exponentielle et de racine.

Question 4 - La plupart des candidats ne savent pas déduire de la définition formelle de limite le caractère borné aux voisinages de ±∞ de la fonction ou oublient d'utiliser la régularité de la fonction. Se contenter de dire que la fonction est continue sur R de limite finie à l'infini n'assurait pas l'obtention de tous les points. Les confusions entre f = O(g) et f ~ g sont fréquentes. Les fonctions à croissance lente sont souvent considérées comme bornées. Et rappelons enfin que démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel peut effectivement être prouvé en montrant qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel, encore faut-il écrire de quel espace vectoriel, qui ne peut pas être R ici comme trop de candidats l'affirment. Notons que la stabilité par combinaisons linéaires a posé beaucoup de problèmes, on constate trop souvent que les candidats inventent des majorations de toutes pièces ou appliquent des recettes incorrectes : l'erreur la plus commune est de prétendre que la suite $(t^k)_k$ est croissante pour tout réel positif t.

Question 5 - La continuité est évoquée dans moins de la moitié des copies. La majoration manque trop souvent de valeurs absolues. L'intégrabilité de la fonction dominante est souvent affirmée sans justification détaillée.

Question 6 - L'indication a fréquemment connu des démonstrations erronées comme $|e^{-t}x+\beta_t y| \leq |x+y|$. Les fonctions à croissance lente sont souvent considérées comme croissantes et on retrouve des inégalités fausses comme $f(e^{-t}x + \beta_t y) \leq f(|x| + |y|)$. Enfin, la limite à l'infini ne peut être une conséquence de la continuité et doit en toute rigueur faire appel à une caractérisation séquentielle ainsi qu'à une application du théorème de convergence dominée pour les suites, bien qu'il soit possible de contourner cela astucieusement. Le jury a bien sûr sanctionné l'utilisation de théorèmes hors programme.

Question 7 - Cette question est en général bien traitée, à condition de ne pas oublier la non-nullité de β_t, très rarement invoquée.

Question 8 - Tout d'abord, on rencontre beaucoup trop d'erreurs de calcul de dérivée d'une fonction composée. Ensuite, l'étude des variations de ψ_y, en calculant les dérivées seconde, voire troisième n'amenait qu'à des échecs. Les intervalles d'étude n'étaient pas clairement explicités et enfin la manipulation des valeurs absolues est une compétence souvent très mal maîtrisée.

Question 9 - Cette question est en général mal traitée. La plupart de ceux qui prétendent au résultat confondent le caractère dérivable et continûment dérivable de $P_t f$ sur R. L'interversion intégrale et limite, limite d'un taux d'accroissement et le lien avec la question précédente sont autant de difficultés qui n'ont pa sété surmontées par bon nombre de candidats.

Question 10 - Là encore, trop de candidats ne maîtrisent pas les valeurs absolues et affirment des inégalités, parfois vraies comme $|a|^k|b|^{n-k} + |a|^{n-k}|b|^k \leq |a|^n + |b|^n$ qui peut se vérifier en envisageant le cas $|a| \leq |b|$, mais souvent fausses comme $(|a| + |b|)^n \leq |a|^n + |b|^n$. Les tentatives de démonstration par récurrence n'aboutissaient ainsi que très rarement. La deuxième partie de la question 10 a été moyennement abordée, mais l'assemblage de l'intégrale majorante sous la forme $A(1 + |x|^m)$ très rarement.

Question 11 - Comme annoncé en préambule, le théorème de régularité, idoine ici, est connu globalement, mais les hypothèses ne sont pas vérifiées précisément, il y a confusion des variables et paramètres, le calcul de la dérivée partielle est faux, ou encore la domination est affirmée sur R^+ entier alors que se restreindre à un segment ou une demi-droite était nécessaire.

Question 12 - L'intégration par parties est trop souvent réalisée sans se soucier de la convergence du crochet, et encore moins de l'existence de l'intégrale.

Question 13 - Cette question n'a pas été beaucoup abordée. Le théorème de la limite de la dérivée est très mal connu. Il manque toujours (ou presque) la continuité de h_x sur R_+ (ou en 0).

Question 14 - Il s'agit d'une question mal réussie par beaucoup de candidats. D'une part, rien n'indique dans le texte que les variables aléatoires considérées sont à valeurs entières, elles sont à valeurs réelles, même si les valeurs qu'elles prennent forment un ensemble dénombrable. Pour rester conforme au programme, il est alors nécessaire d'utiliser une énumération pour exprimer leur espérance. En effet, quoiqu'on puisse le regretter, le programme de la filière PSI ne donne aucun sens à une quantité comme $\sum_{x \in X(\Omega)} \cdots$ et ne contient aucun théorème de sommation par paquets. Compte tenu des règles du concours, les sujets sont conçus pour être abordés avec la seule aide des outils figurant au programme, et les candidats doivent s'y tenir.

D'autre part, les candidats ayant abordé cette question peuvent écrire des énormités comme : ≪ si $X_1(\omega) \leq 1$, alors X_1 est d'espérance finie, de même lorsque $X_1(\omega) > 1$ ≫ ou confondre les éléments de Ω et les valeurs prises par X_1. Enfin, certains candidats semblent croire que si le produit de deux variables aléatoires admet une espérance alors chacune de ces variables admettent une espérance.

Question 15 - La confusion entre indépendance mutuelle et indépendance deux à deux est fréquente. Décrire cette indépendance par l'indépendance des événements $(X_k = x)$, avec le même x pour toutes les variables, ne suffit pas. Au-delà de la définition d'indépendance mutuelle très mal connue, on se demande pour certaines copies si le/la candidat(e) comprend ce qu'il écrit, car on peut lire des intersections de variables aléatoires, voire des intersections de probabilités.

Question 16 - Les candidats ayant abordé cette question ont souvent invoqué, sans justification correcte, l'indépendance des variables aléatoires X_i^m et $g(S^{(i)})$ ou l'existence de l'espérance de $g(S^{(i)})$. Les deux points étaient nécessaires et le fait que *g* soit bornée n'entraîne pas l'indépendance.

Les questions suivantes ne concernent qu'une faible fraction des candidats.

Terminons par réitérer quelques conseils pour les futurs candidats.

- Maîtriser parfaitement son cours.
- Bien réfléchir, aidé d'un brouillon, à la structure du raisonnement ou du calcul avant de le coucher sur le papier. Donner toutes les justifications pertinentes (et rien qu'elles !), et structurer correctement ses raisonnements.
- Il est toujours préférable d'analyser un nombre réduit de questions en profondeur plutôt que de traiter superficiellement la totalité du sujet.