

## F-MATHEMATIQUES II - filière PSI

### I) Remarques générales :

Le problème posé par cette épreuve portait sur la racine de l'opposé du Laplacien et l'équation de la chaleur généralisée.

La première partie concerne des séries de Fourier et introduit la notion d'opérateur différentiel.

La seconde partie introduit un opérateur différentiel, étudie ses propriétés, en particulier une équation différentielle.

La troisième partie en établit une représentation intégrale.

La quatrième partie étudie les propriétés relatives aux conditions initiales.

La cinquième partie introduit une fonction "énergie".

Ce problème exigeait des candidats une solide maîtrise des techniques portant sur les séries de fonctions et les intégrales ainsi qu'une bonne connaissance du cours sur les séries de Fourier.

Il fallait, à plusieurs reprises, justifier avec soin l'interversion d'une série et d'une intégrale.

Il fallait aussi bien comprendre la structure logique de l'énoncé, et savoir utiliser les résultats établis pour la résolution des questions ultérieures. Les questions 3 et 4 étaient essentielles et intervenaient directement pour la résolution des questions 6, 7, 9, 10, 13, 14, 18 et 20. Il fallait lire attentivement l'énoncé, car les hypothèses de la question 6 n'étaient plus vérifiées pour les questions 7, 8, 9, où la fonction  $f$  était seulement supposée continue.

### II) Remarques particulières :

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème :

**Question 1:** Trop de candidats encadrent  $c_n(f)$  alors qu'il est complexe. Pour montrer qu'une suite complexe est bornée, il suffit de majorer le module du terme général, indépendamment de l'entier  $n$ .

**Question 2:** La première partie est une question de cours. Les candidats font souvent des récurrences compliquées et fausses. En ce qui concerne l'inégalité, l'existence de  $C_k$  est souvent mal ou non justifiée.

**Question 3:** Il fallait se ramener à des séries de fonctions traditionnelles, indexées par des ensembles du type  $\{k \in \mathbb{Z} \mid k \geq a\}$  pour pouvoir appliquer les théorèmes du programme. Une bonne partie des candidats savent prouver la convergence simple et la continuité. Toutefois, peu de candidats résolvent avec succès le calcul des coefficients de Fourier. Il fallait utiliser le bon type de convergence et la bonne série de fonctions, soit la convergence uniforme et la série de fonctions de terme général  $f_n g$ , et justifier l'interversion entre intégration et sommation. Trop de candidats se trompent sur les types de convergence, ou les invoquent tous, en espérant que le bon figurera dans la liste. Ils ignorent les définitions, croyant par exemple qu'une série converge uniformément si "le terme général tend vers 0". Beaucoup de candidats invoquent souvent un mystérieux "théorème d'interversion somme intégrale", en se souvenant seulement vaguement de la conclusion, si bien que ce fameux théorème n'a même plus d'hypothèse.

**Question 4:** Les convergences normales sont souvent établies avec succès, mais les candidats ont du mal ensuite à appliquer les théorèmes de dérivation terme à terme à un ordre quelconque. Beaucoup considèrent comme évident le fait que  $h$  soit dérivable à l'ordre  $p$ , et que sa dérivée  $p$ -ième soit la somme de la série de terme général  $(d_n e_n)^{(p)}$ , la convergence normale étant invoquée uniquement pour assurer la continuité de cette dernière somme ! Une autre erreur plus subtile a consisté à faire un

raisonnement par récurrence inopérant, la propriété au rang  $p$  énonçant seulement que  $h$  est  $p$  fois dérivable, sans donner l'expression de la dérivée  $p$ -ième, interdisant ainsi d'appliquer la dérivation terme à terme à l'ordre 1 !

**Question 5:** Presque tous les candidats se contentent de calculs formels sans justification rigoureuse. Il pouvait être utile d'invoquer le caractère linéaire des coefficients de Fourier. La réciproque est rarement traitée correctement. Il fallait savoir justifier que deux fonctions continues ayant mêmes coefficients de Fourier sont égales, ou utiliser les théorèmes de convergence normale des séries de Fourier, les fonctions concernées étant ici de classe  $C^\infty$ .

**Question 6:** Peu de candidats ont identifié la série considérée comme un cas particulier de la situation étudiée à la question 4. On pouvait alors montrer la convergence normale de la série de fonctions de terme général  $\rho(|n|)c_n(f)e_n$ , et le caractère  $C^\infty$  de la somme.

**Question 7:** Les deux tiers des candidats ne lisent pas l'énoncé avec suffisamment d'attention et ne voient pas que  $f$  est seulement continue, et non de classe  $C^\infty$ , ce qui ne permet pas d'utiliser l'inégalité (2). Le facteur exponentiel permettait de conclure sans difficulté.

**Question 8:** Cette question a été source de confusion dans presque toutes les copies. La variable considérée ici était  $t$  et non  $x$ , contrairement à la question précédente. La plupart des candidats font une confusion sur la convergence normale, en établissant une majoration où la variable  $t$  est encore présente, ou en faisant une majoration sans la variable  $t$  et en affirmant à tort la convergence normale sur  $\mathbb{R}$ . La convergence uniforme n'était assurée que sur des intervalles du type  $[a, +\infty[$ , avec  $a > 0$ , situation normalement familière aux candidats.

**Question 9:** Trop souvent, les candidats font des calculs formels en intervertissant série et intégrale sans justification, sans faire référence aux questions précédentes et même, souvent sans rédaction. Il était possible d'obtenir une expression du membre de gauche sous forme de série et de même pour le membre de droite en utilisant les résultats des questions 3 et 7.

**Question 10:** Un certain nombre de candidats invoque l'existence et l'unicité d'une solution à l'aide d'un théorème de Cauchy-Lipschitz, ce qui est complètement hors sujet. Beaucoup de candidats prouvent que les coefficients de Fourier d'une solution  $u$  sont déterminés de façon unique, mais ne savent pas justifier que cela détermine la solution elle-même de façon unique. Le problème de l'existence n'est presque jamais traité. Quand le candidat définit  $u$  comme somme d'une série trigonométrique, il justifie très rarement le fait que  $u$  est bien de classe  $C^\infty$  et que ses coefficients de Fourier sont bien ceux qui sont souhaités, ce qui peut être obtenu par application des questions 3 et 4.

**Question 11:** Cette question est rarement traitée. On pouvait utiliser l'expression de la solution obtenue à la question 10. Il fallait ensuite utiliser une interversion série intégrale, à l'aide du théorème d'intégration terme à terme, sans oublier d'hypothèse bien sûr. Il y avait une difficulté pour la convergence et le calcul de l'intégrale du terme général,  $\alpha$  n'étant pas forcément réel.

**Question 12:** Cette question est très rarement traitée. Il fallait appliquer les mêmes techniques qu'à la question 10.

**Question 13:** Il y a trop souvent des calculs sans justification. La difficulté essentielle était de justifier la formule :  $c_n(A^1(f)) = |n| c_n(f)$ .

**Question 14:** Le fait que nécessairement, pour tout entier relatif  $n$ ,  $P(n) = |n|$ , n'est pas évident. De même, le fait qu'il n'existe aucun polynôme  $P$  présentant cette propriété est en général affirmé sans justification sérieuse. Rappelons que lorsque l'on considère deux sommes imbriquées, il est souhaitable

d'utiliser des indices différents. Très souvent les sommes doubles sont "simplifiées" et donnent miraculeusement le résultat.

**Question 15:** Cette question a été souvent abordée, mais le candidat se borne trop souvent à paraphraser l'énoncé. Il fallait justifier le titre du document, et non celui de la partie.

**Question 16:** De nombreux candidats devinent la valeur de  $\alpha$  à l'aide de la question 17. Il fallait utiliser les résultats admis sur les transformées de Fourier et appliquer rigoureusement le théorème d'intégration terme à terme, ce qui a été fait rarement.

Les questions suivantes ont été très peu abordées sérieusement, faute de temps. De nombreux candidats essaient de grappiller des points, souvent en paraphrasant l'énoncé.

**Question 17:** Comme il était suggéré dans l'énoncé, il fallait utiliser une suite  $(P_k)$  de polynômes trigonométriques qui converge uniformément vers  $f$ , utiliser la question 1, et les inégalités conservées par intégration.

**Question 18:** On pouvait encore utiliser le théorème d'intégration terme à terme. Le résultat demandé découle du fait que pour tout réel  $t > 0$ , l'intégrale  $\int_0^{2\pi} (f(y) - Q_t^1(y)) dy$  est nulle.

**Question 19:** Cette question est très rarement traitée avec succès. On pouvait utiliser le résultat de la question 17, faire le changement de variable  $x = tu$ , puis utiliser la caractérisation séquentielle d'une limite et le théorème de convergence dominée.

**Question 20:** Cette question a été abordée par un certain nombre de candidats, mais il y a très peu de bonnes solutions. On pouvait utiliser la formule de Parseval pour montrer la décroissance de la fonction  $E$ , puis utiliser le théorème de la double limite pour trouver la limite de  $E$ .

### III) Conseils aux candidats et conclusion :

Les notes obtenues sont étalées de 0 à 20. Malgré un barème généreux, la moyenne obtenue par les candidats est de 8 sur 20.

Les prestations des candidats sont globalement très décevantes. L'énoncé est souvent lu avec une attention insuffisante. Le cours est très souvent mal su, en particulier les définitions et les grands théorèmes classiques.

Concluons sur une note optimiste en constatant que nous avons eu tout de même la satisfaction de corriger un certain nombre de bonnes copies.

On ne saurait trop recommander aux candidats de lire le sujet en entier avant de commencer la résolution. Une vision globale plus claire peut donner de précieuses indications pour certaines questions.

Les candidats doivent bien connaître leur cours, qui comporte tous les outils qu'il faudra mettre en oeuvre pour rédiger une bonne solution. Ils doivent aussi maîtriser l'art du raisonnement et les techniques classiques de calcul.

Il faut avoir réfléchi complètement sur une question avant d'en commencer la rédaction, pour obtenir la clarté et la rigueur nécessaires. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle doivent être bannis.

Espérons que ces remarques pourront aider les futurs candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours.