1.2.F -MATHEMATIQUES II - filière PSI

I) REMARQUES GENERALES :

L'objet proposé dans de cette épreuve était l'étude de la notion de fonction d'endomorphisme, définie dans un certain cadre.
Dans la première partie, on étudiait un certain nombre de propriétés des endomorphismes symétriques et des fonctions de tels endomorphismes.
Dans la seconde partie, on étudiait la relation d'ordre de Löwner sur l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbf{R}^n$ et la croissance de certains opérateurs associés à des fonctions réelles d'une variable réelle.
Dans la troisième partie, on étudiait encore la croissance de certains opérateurs, l'intégrabilité de fonctions définies sur $\mathbf{R}^*_+$ à valeurs dans l'ensemble des endomorphismes de Rn et l'inégalité de Löwner-Heinz.
Ce problème a été perçu comme simple par une majorité de candidats, alors qu'il est assez subtil.
La plupart des candidats sont complètement passés à côté des difficultés des questions, sans les avoir identifiées, à cause d'une méconnaissance grave de leur cours. En outre, ils n'ont pas passé tout le temps qu'il fallait pour comprendre l'énoncé et ses définitions. Le temps passé à bien comprendre un énoncé n'est jamais du temps perdu.
Ce problème demandait une bonne maîtrise de plusieurs parties du cours : algèbre générale, algèbre linéaire, algèbre bilinéaire, analyse réelle, intégration des fonctions sur un intervalle.

II) REMARQUES PARTICULIERES :

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème :

Question 1 : Cette question, bien que très simple, est souvent mal traitée. Le candidat veut résoudre la question à l'aide de matrices. Il est alors question de : "matrice canoniquement associée", "matrice associée" ou "matrice par rapport à une certaine base *B*" sans que cette base *B* ne soit précisée. Rappelons que si un endomorphisme *T* est symétrique, le fait que sa matrice par rapport à une certaine base *B* soit elle-même symétrique, dépend du choix de cette base *B*.
Certains candidats utilisent "la transposée de *T*", ce qui n'a pas de sens, car *T* est un endomorphisme et non une matrice. L'assimilation d'un endomorphisme et de "sa" matrice est particulièrement aventureuse. Certains candidats vérifient seulement que x E, $(Tx,x) = (x, Tx)$, ce qui est toujours vrai, que l'endomorphisme T soit symétrique ou non. Certains candidats confondent "endomorphisme symétrique", et "endomorphisme involutif".

Question 2 : Cette question, également très simple, a donné lieu à de nombreuses surprises. Dans certaines copies, il est écrit que si λ est valeur propre de *T*, alors, pour tout vecteur *x* de $\mathbf{R}^n$, on a $Tx = \lambda x$. Ainsi, un endomorphisme qui a au moins une valeur propre est une homothétie ! Ceci montre une méconnaissance profonde des notions de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre.

Question 3 : Souvent les candidats ne précisent pas que l'on prend une base orthonormale de vecteurs propres. Ce n'est pourtant que dans ce cas que l'on a $(T\,x,x) =$
Certains candidats écrivent *"Min" ou "Max"*, sans avoir montré l'existence d'un minimum ou du maximum dans le cadre étudié.

Question 4 : Cette question pouvait être résolue sans difficulté si la question précédente avait été traitée correctement.

Question 5 : Certains candidats qui n'ont pas fait l'effort de comprendre l'énoncé, écrivent que $U = f \circ T$, ce qui n'a aucun sens. D'autres considèrent un vecteur *x* quelconque de *E* et affirment qu'un tel vecteur appartient à l'un des sous-espaces propres de *T*. L'application *U* était définie dans l'énoncé par ses restrictions aux sous-espaces propres de *T*. Rappelons que si *T* est un endomorphisme diagonalisable d'un espace vectoriel *E*, l'espace *E* est égal à la somme des sous-espaces propres de *T*, et non pas à leur réunion.

Question 6 : Beaucoup de candidats n'ont même pas compris la signification de l'expression ”T^j”. On voit très souvent une égalité absurde de la forme : ”$p(T(x)) =$, qui sous-entend que l'on prend le vecteur $T(x)$ et qu'on l'élève à la puissance j. Cela n'a aucun sens : les seules lois dans un espace vectoriel étant l'addition et la multiplication par un scalaire. Très souvent, le candidat ne comprend pas la question posée et se contente de montrer que le polynôme $p(T)$, considéré comme polynôme d'endomorphisme comme dans le cours, est un endomorphisme symétrique.

Question 7 : La grande majorité des candidats ayant traité la question se contentent d'exhiber une fonction de **R** dans **R** non polynômiale, sans justifier ce fait d'ailleurs. D'autres candidats ne sont pas très logiques, car ils ne traitent pas la question, mais admettent que la réponse est négative.
Ils traitent ensuite les deux questions suivantes et même parfois davantage, en admettant implicitement que la réponse est positive. Beaucoup de ceux qui pensent avoir montré que la réponse est négative agissent de même. Cette question met en évidence la grande ignorance des candidats en ce qui concerne le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Question 8 : Cette question est particulièrement bâclée. Les candidats, dans leur écrasante majorité, affirment que les sous-espaces propres de $f(T)$ et de T sont les mêmes. Ils n'ont pas pris conscience du fait qu'il se peut que la restriction de f au spectre de T ne soit pas injective. Certains disent qu'une base diagonalisante pour T est aussi diagonalisante pour $f(T)$, ce qui est exact, mais ils n'ont alors pas complètement répondu à la question.

Question 9 : On voit malheureusement dans cette question les mêmes incohérences de pensée que dans la question 6. Certains écrivent par exemple que $(fg)(T)(x) = f(T)(x)g(T)(x)$.

Question 10 : Il n'était pas nécessaire de prouver d'abord l'existence de S^{-1}, si on remarquait l'inclusion $\sigma(S)$ $]0,+\infty[$ et que $S \circ f(S) = Id$. Comme pour la question 6, cette question a une apparence trompeuse de facilité et met souvent en lumière le fait que le candidat n'a pas compris la définition générale de la construction de l'endomorphisme $f(T)$.

Question 11 : Très peu de candidats savent montrer correctement que l'équation $C^2 = S$ a une solution unique dans . Le nombre de solutions trouvées dans S_n est la plupart du temps fantaisiste : 2, 2n, ou n!

Question 12 : La définition d'une relation d'ordre est très largement méconnue. Il y a parfois une, deux ou trois conditions. Quand il y en a trois, ce ne sont pas toujours les bonnes. Parfois, l'antisymétrie signifie pour le candidat que : $(T_1 \leq T_2)$ $(-T_2 \leq -T_1)$. Quand la notion de relation d'ordre est comprise, la notion de relation d'ordre totale ne l'est pas toujours.

Question 13 : Beaucoup de candidats ne pensent pas à revenir à la définition de la relation $\leq$ dans S_n et écrivent des énormités. Pour beaucoup de candidats, il semble naturel que si il y a une inégalité entre endomorphismes, on en obtient une nouvelle en composant à gauche ou à droite par un endomorphisme quelconque. Il est bon de signaler que le produit de deux endomorphismes symétriques n'est symétrique que si ces deux endomorphismes commutent.

Question 14 : La formulation de cette question est assez fine. Comme f est définie seulement sur $\mathbf{R}_+$, un contre exemple doit être trouvé avec des éléments dans , contrairement aux propositions de certains candidats. Si on avait considéré au contraire que f était définie sur **R**, un contre exemple était déjà très facile à trouver dans $S_1 = \mathbf{R}$. Le contre exemple demandé était fourni par l'énoncé.
Malgré cela, la propriété a rarement été montrée correctement. Il fallait montrer que M_1 et M_2 sont dans , montrer que si une matrice est dans , son carré y est également, que $M_2 - M_1$ est dans et que $-$ n'est pas dans . Certains candidats ont ”montré” que $-$ est dans (ce qui est faux) et en ont ”déduit” (ce qui est absurde sur le plan logique) que l'opérateur f est croissant !

Question 15 : Si l'énoncé fournissait des indications assez fines, on pouvait raisonnablement penser qu'elles n'étaient pas superflues. Cette question était assez subtile et nécessitait une certaine réflexion. Il fallait entre autre utiliser dans le raisonnement à plusieurs reprises le résultat de la question 13.

Certains candidats manipulent les inégalités comme si les membres étaient réels et en appliquant des règles fantaisistes. Si on a : $I \geq U \circ T \circ U$, on a, bien sûr, pour tout vecteur x, $x \geq U \circ T \circ U(x)$ et si x est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, $x \geq \lambda x$, et donc, $1 \geq \lambda$! .

Question 16 : Cette question était assez subtile et nécessitait une réflexion significative. Les simulacres de démonstration ont été fréquents pour cette question.

Question 17 : Il fallait utiliser l'égalité $f_u(t) = 1 -$ ——, et utiliser à bon escient la question 15. Pour cette question, les solutions fantaisistes ont été fréquentes.

Question 18 : Dans cette question, les candidats ne comprennent pas qu'il faut non seulement montrer que les $\Phi_{i\,j}$ restent intégrables après le changement de base, mais aussi remarquer que l'intégrale $\Phi(s)\,ds$ devient $P^{-1}(\Phi(s)\,ds)P$, où P est la matrice de changement de base.

Questions 19 et 20 : Les candidats qui abordent ces questions négligent souvent le conseil qui leur est donné de se placer dans une base "orthonormée adaptée à *S*". Il fallait interpréter le mot "adaptée à *S*", en prenant une base diagonalisante pour *S*. Certains candidats confondent les notions de convergence et d'absolue convergence.

Question 21 : Cette question était assez fine et subtile. Aucun candidat ne semble avoir pensé à justifier que l'intégrale est croissante en tant qu'opérateur. Dans l'ensemble, ce problème d'apparence plutôt simple, s'est révélé difficile pour la plupart des candidats, malgré tout le soin apporté à la rédaction de l'énoncé. Les questions traitées avec succès le plus souvent ont été les questions Q2, Q4 (le sens facile), Q8 (le sens facile), Q9, Q10, la première partie de Q11, le contre exemple proposé en Q14 et le début de Q15. Les questions de la fin ont souvent été mal traitées, ou non traitées, parce que le temps a manqué aux candidats.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS ET CONCLUSION :

Les notes obtenues sont étalées de 0 à 20. Malgré un barème généreux, la moyenne obtenue par les candidats est de 8,55 sur 20. Les prestations des candidats sont globalement très décevantes. L'énoncé est souvent insuffisamment lu et peu ou pas compris. Les raisonnements sont souvent flous, approximatifs, fantaisistes, parfois très lointains d'un raisonnement rigoureux et même d'un raisonnement mathématique. Les calculs sont souvent maladroits, compliqués, faux. Le cours est très souvent mal su et les candidats ont souvent peu d'esprit critique sur ce qu'ils écrivent.
Concluons sur une note optimiste en constatant que nous avons eu tout de même la satisfaction de corriger un certain nombre de bonnes copies.

On ne saurait trop recommander aux candidats de lire le sujet en entier avant de commencer la résolution.
Une vision globale plus claire peut donner de précieuses indications pour certaines questions.

Les candidats doivent bien connaître leur cours, qui comporte tous les outils qu'il faudra mettre en œuvre pour rédiger une bonne solution.

Ils doivent aussi maîtriser l'art du raisonnement et les techniques classiques de calcul. Ils doivent être régulièrement entraînés pour cela. Il faut avoir réfléchi complètement sur une question avant d'en commencer la rédaction, pour obtenir la clarté et la rigueur nécessaires. Lorsque l'on utilise un théorème, il faut en donner un énoncé exact et vérifier que toutes ses hypothèses sont satisfaites. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle, doivent être bannis.

Espérons que ces remarques pourront aider les futurs candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours