1.2 F - MATHEMATIQUES II - filière PSI

I) REMARQUES GENERALES

Le sujet posé à cette épreuve proposait d'étudier un problème de Cauchy, représentant une course poursuite entre un lièvre et une tortue (indications fournies dans l'énoncé pour la bonne compréhension du problème).

L'équation étudiée dans ce problème a été introduite par Loewner et elle joue un rôle important dans diverses branches des mathématiques (analyse complexe, processus stochastiques). Ce problème demandait une bonne maîtrise de nombreux points du cours : théorèmes classiques de l'analyse réelle, dérivation, intégration, équations différentielles linéaires du premier ordre et problèmes de Cauchy. Il demandait aussi une bonne maîtrise des techniques de calcul en analyse.

Rappelons que pour réussir une épreuve de mathématiques, il n'y a rien de plus important que de lire attentivement l'énoncé. C'était encore plus particulièrement le cas pour cette épreuve. Il y avait une page entière comportant des explications, des définitions et des propriétés admises. Il est à noter qu'il fallait intégrer avec soin la définition d'une solution maximale et qu'elle était différente de la définition usuelle. En effet, l'intervalle de définition était systématiquement ouvert à droite, ce dont il fallait tenir compte pour plusieurs questions.

Rappelons aux candidats qu'il ne suffit pas de comprendre le sujet. Il faut aussi faire *la preuve* de cette *compréhension*. Il ne suffit pas d'invoquer un théorème, en écrivant "d'après un théorème du cours", ou "d'après le théorème de X", il faut aussi en donner un énoncé exact et montrer que toutes les hypothèses sont satisfaites. Trop souvent, les candidats énumèrent des arguments surabondants, en recopiant une bonne partie des propriétés connues d'après l'énoncé et écrivent ensuite la conclusion demandée dans la question.

Les questions de la première partie étaient délicates. Les trois premières questions étaient subtiles et étaient divisées en plusieurs étapes. L'énoncé fournissait heureusement des indications précieuses que les candidats n'ont pas toujours su utiliser.

Les questions de la deuxième et de la troisième partie comportaient des calculs qui étaient faciles. Certaines pouvaient demander de l'habileté. Beaucoup de résultats étaient donnés dans l'énoncé. Trop de candidats se sont contentés de paraphraser cet énoncé, sans autre preuve sérieuse. Certaines questions étaient théoriquement à la portée de tous les candidats. Hélas, elles n'ont pas toujours été bien traitées. D'autres, de niveau de difficulté moyen, demandaient des calculs clairs et rigoureux et une bonne qualité de rédaction.

Certains candidats agissent avec beaucoup trop de précipitation, aussi bien dans le raisonnement que dans les calculs. Certains, manifestement, ont une maîtrise insuffisante dans l'art du calcul. Ils devraient faire un premier calcul au brouillon, ce qu'ils ne font pas, et ainsi, sans en être conscients, rendent leur brouillon pour la correction.

La prestation moyenne des candidats est décevante. Il y a de nombreuses copies extrêmement faibles, à la fois en qualité et en quantité. L'ensemble des candidats est partagé de façon assez nette en deux catégories. Une partie des candidats sait traiter avec plus ou moins de rigueur les questions de la première partie, comportant essentiellement du raisonnement et ne sait pas faire efficacement les calculs des parties suivantes. L'autre partie des candidats traite très mal les questions de la première partie, mais arrive mieux à traiter les questions des deuxième et troisième partie, où les calculs sont dominants. Il y a aussi un certain nombre de copies révélant une bonne compréhension du problème dans son ensemble. Il y a beaucoup trop de candidats qui essaient de traiter un maximum de questions pendant le temps imparti, au détriment de la qualité des solutions.

Le problème a été noté avec un barème très généreux. Les notes sont étalées de 0 à 20, la moyenne étant de de 8,23 sur 20.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème :

Question 1 : L'énoncé explique que le problème de Cauchy représente une course poursuite entre un lièvre et une tortue. Beaucoup de candidats se sont alors engouffrés dans la brèche pour proposer des "raisonnements phénoménologiques" qui n'avaient rien à voir avec les mathématiques, comme par exemple :

"On arrête la course quand le lièvre rattrape la tortue, et donc, jusqu'à ce moment-là, il est toujours resté derrière elle. Ceci prouve donc que :

D'autres font de la psychologie comportementale comparative concernant le lièvre et la tortue. On est alors amené à comprendre que les résultats affirmés dépendent de la nature des animaux considérés !

Plus sérieusement, on attendait des candidats des démonstrations mathématiques. On pouvait invoquer la continuité sur un intervalle, puis appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. Enfin, on pouvait prouver la croissance stricte de d'après sa dérivée et appliquer le théorème de la limite monotone. Il était essentiel de préciser que les fonctions étaient définies sur un intervalle ou donner l'ensemble de définition en clair.

Les candidats font une confusion presque systématique entre la condition :

qu'ils écrivent, et la condition :

qu'ils croient avoir écrit.

En ce qui concerne la limite éventuelle de , pour beaucoup de candidats, elle existe a priori. Beaucoup de candidats multiplient les arguments sans savoir vraiment lesquels sont pertinents. Par exemple :"la fonction est continue, de classe et croissante, donc la limite existe et elle est réelle ou égale à ".

Question 2 : Dans une majorité de copies, on lit que la fonction est continue sur l'intervalle et donc y est bornée. Certains candidats affirment que si une fonction réelle est continue sur l'intervalle et a une limite finie à gauche en , alors, elle est bornée sur . C'est exact, mais ceci nécessite une démonstration. Le caractère maximal de la solution dans cette question, comme dans d'autres parmi les suivantes, pose aux candidats des problèmes conceptuels qui les dépassent complètement. Dans deux copies sur trois, les élèves, après avoir suivi les suggestions de l'énoncé, finissent par expliquer que n'est pas maximale puisqu'elle est la restriction d'une solution définie sur l'intervalle qui contient strictement l'intervalle . Cela montre qu'ils n'ont pas bien lu ou pas compris l'énoncé.

Question 3 : Fort heureusement, l'énoncé donnait la marche à suivre pour trouver une contradiction en ce qui concerne le caractère maximal de la solution. Malgré les indications de l'énoncé, certains se sont contentés de montrer que la solution se prolongeait sur l'intervalle , ce qui ne fournissait pas la contradiction souhaitée. Beaucoup de candidats font des démonstrations grossièrement fausses en prétendant que les inégalités strictes sont préservées par passage à la limite.

Question 4 : Il suffisait d'appliquer le second point du théorème 1 et le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction en étant vigilant sur les ensembles de définition des différentes fonctions. Trop de candidats se contentent d'écrire des arguments vagues comme "l'égalité entre les fonctions et est en contradiction avec l'unicité d'une solution maximale".

Question 5 : Il fallait utiliser judicieusement les résultats des questions 3 et 4. Très souvent, les candidats utilisent abusivement le fait que les inégalités strictes sont préservées par passage à la limite et certains utilisent l'inégalité , alors qu'on a seulement l'inégalité large. Une lecture attentive de l'énoncé permettait d'éviter ces erreurs.

Question 6 : A partir de cette question, le problème proposait l'étude d'exemples. Le calcul demandé à cette question était élémentaire et pourtant, la plupart des candidats ne cherchent même pas à résoudre l'équation différentielle. Ceux qui s'y risquent oublient souvent la constante d'intégration, ou la placent mal.

Question 7 : La plupart du temps, la valeur de a est trouvée, souvent parachutée sans qu'il y ait eu de recherche. Toutefois, le caractère maximal de la solution est très rarement justifié. La plupart du temps, on affirme que la fonction trouvée à l'aide de son expression n'est pas définie pour et par conséquent, aucun prolongement n'est possible, alors que ce prolongement pourrait très bien exister et être défini à l'aide d'une autre expression.

Question 8 : Une grande proportion des candidats ne sait pas dériver une fonction dont l'expression est de la forme .

Question 9 : Il était essentiel de justifier que la fonction était bien définie sur l'intervalle considéré. Les calculs sont la plupart du temps compliqués et maladroits. Ils n'aboutissent pas ou au contraire, aboutissent miraculeusement sans être vraiment authentiques.

Question 10 : Pour étudier les variations de en fonction de , seule une minorité de candidats pense à dériver cette fonction de . Pour montrer que , certains affirment que .

Question 11 : Les candidats arrivent assez souvent à montrer que . Les tentatives pour prouver que sont en général beaucoup plus fantaisistes. Pour montrer que , un tout petit nombre de candidats tente de résoudre l'équation sur l'intervalle , ce qui est une bonne méthode. C'est presque le même calcul qu'à la question 6, mais la constante d'intégration est différente.

Question 12 : Cette question était très facile et a été particulièrement mal traitée par les candidats. Ceci s'explique probablement par le temps limité et la fatigue en fin d'épreuve. L'expression de – est parfois donnée, sans que l'expression de n'apparaisse clairement. La valeur de , donnée dans lénoncé, est rarement justifiée.

Question 13 : Beaucoup de candidats, parmi les meilleurs, écrivent sans justification que

Question 14 : Les valeurs de et trouvées sont souvent fantaisistes. Il fallait utiliser judicieusement le résultat de la question 3.

Question 15, 16, et 17 : Il fallait savoir manipuler les inégalités et utiliser la conservation des inégalités par intégration.

Question 18 : Cette question serait presque à la portée des candidats, mais ils sont en général trop épuisés pour conduire les vérifications qui s'imposent. Il faut montrer que la suite est toujours définie et à valeurs toujours strictement positives. On peut alors en déduire qu'elle est monotone décroissante et également qu'elle ne peut avoir de limite.

Les questions de la fin ont souvent été mal traitées ou non traitées, probablement par manque de temps.

III) CONCLUSION :

Les prestations des candidats sont globalement très décevantes. L'énoncé est souvent insuffisamment lu. Les raisonnements sont souvent flous et approximatifs, parfois très lointains d'un raisonnement rigoureux et même d'un raisonnement mathématique. Les calculs sont souvent maladroits, compliqués, faux. Les candidats ont souvent peu d'esprit critique sur ce qu'ils écrivent.

Concluons sur une note optimiste en constatant que nous avons eu tout de même la satisfaction de corriger un certain nombre de bonnes copies.

Rappelons que les candidats doivent bien connaître leur cours, maîtriser l'art du raisonnement et les techniques élémentaires du calcul. Seule, la pratique personnelle régulière permet d'atteindre cet objectif.

Les candidats doivent s'entraîner à *exposer avec clarté et rigueur* les raisonnements et les calculs. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle doivent être bannis.

Espérons que ces remarques pourront aider les futurs candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours.