**1.2 F - MATHEMATIQUES II - filière PSI**

## I)REMARQUES GENERALES

Cette épreuve proposait de démontrer la formule de Desnanot-Jacobi, dite aussi formule de condensation, et d'en explorer les applications et généralisations. Il portait sur l'algèbre linéaire et multilinéaire, et les espaces vectoriels normés. Il demandait une bonne maîtrise de certains points du cours : les techniques de calcul des déterminants, les propriétés de la matrice complémentaire d'une matrice, les techniques de changement de bases. Il fallait étudier l'algorithme de calcul des déterminants de Lewis Carroll et en évaluer la performance.

Rappelons que le candidat doit faire la preuve de la compréhension du sujet. Il ne suffit pas d'invoquer un théorème à l'aide de son nom. Il faut en fournir un énoncé exact et montrer que les hypothèses sont bien satisfaites, afin de pouvoir en tirer les conclusions souhaitées.

Pour réussir la résolution d'un problème de mathématiques, il faut comprendre sa structure logique, et en particulier savoir utiliser les résultats précédents pour traiter une nouvelle question, même si certains d'entre eux n'ont pas été démontrés par le candidat. L'utilisation des résultats de questions précédentes était d'ailleurs parfois demandée explicitement dans l'énoncé.

Le niveau de difficulté des différentes questions était très variable. Il était possible de traiter rapidement et rigoureusement un certain nombre de questions faciles. Certaines questions très difficiles ont été très peu abordées, ou très mal traitées. Entre ces deux niveaux, il y avait un certain nombre de questions d'un niveau de difficulté moyen, pour lesquelles les candidats se sont différenciés par la rigueur des solutions, les explications dans les calculs, et la qualité de la rédaction.

Une des difficultés du problème était la bonne compréhension des notations introduites dans l'énoncé, leur respect et leur utilisation judicieuse dans la rédaction.

Certains candidats agissent avec trop de précipitation et laissent passer des fautes inexcusables. Beaucoup de candidats ne connaissent pas la définition d'une norme. La caractérisation du rang d'une matrice est mal connue. Les caractérisations de la continuité des applications entre espaces vectoriels normés sont souvent mal connues. Les candidats confondent parfois une formule de récurrence et une formule obtenue à l'aide d'une démonstration par récurrence. Pour démontrer une propriété par récurrence, il faut choisir celle-ci judicieusement et traiter correctement l'initialisation.

Le candidat doit prendre le temps nécessaire pour lire attentivement l'énoncé, pour réfléchir, pour rédiger, et pour relire la rédaction définitive.

La prestation moyenne des candidats est décevante. Il y a de nombreuses copies extrèmement faibles, à la fois en quantité et en qualité. En revanche, il y a un certain nombre de copies ayant bien compris le problème dans son ensemble. Rappelons qu'il vaut mieux faire une rédaction de qualité des solutions des questions que l'on sait traiter dans le temps imparti, plutôt que de vouloir à tout prix traiter la totalité du problème.

## II) REMARQUES PARTICULIERES

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème.

Q1 : Beaucoup de candidats ne connaissent pas la définition d'une norme. Nous avons accepté l'absence de mention sur la positivité de la norme, car celle-ci est une conséquence des autres axiomes. En revanche, nous avons mis 0 point aux candidats ayant oublié la propriété de séparation, ou la pseudo-homogénéité, ou l'inégalité triangulaire. Certains écrivent que $N$ est une application linéaire. D'autres écrivent que la norme d'un produit de matrices est égale au produit des normes. S'il en était ainsi, l'anneau des matrices serait intègre, ce qui est faux si n est supérieur ou égal à 2.

Q2 : Certains ont affirmé que $r$ est le rang de $J$, ce qui est exact, mais ce n'est pas la réponse attendue. Il fallait donner l'interprétation de $r$ en fonction de la matrice $M$, qui était donnée au départ, et non en fonction de la matrice $J$ qu'il fallait déterminer. Il ne fallait pas se contenter d'écrire que $r$ était le rang de $M$. Il fallait le justifier. Certains ont tenté de le faire en affirmant que les matrices $M$ et $J$ sont semblables, ce qui est faux. Elles sont seulement équivalentes. Certains ont écrit que $r$ Était l'ordre de la valeur propre 1 pour $J$, ce qui est exact, mais sans intérêt, car cette propriété n'est pas conservée pour $M$.

Q3 : Certains écrivent qu'il suffit de considérer une suite $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles, sans expliciter du tout une telle suite. D'autres définissent explicitement une telle suite, dont tous les termes sont en fait des matrices non inversibles. Il eut été plus simple de prendre une suite constante. Il est très rarement démontré correctement que si la suite $(J_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $J$, la suite $(PJ_kQ)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $PJQ$. Les démonstrations correctes sont la plupart du temps trop compliquées. Certains écrivent : "on sait que l'ensemble des matrices inversibles est dense dans l'ensemble $M_n(\mathbb{R})$". C'est en fait équivalent à ce qu'il fallait démontrer. On demande une démonstration, pas une référence, laquelle étant d'ailleurs hors programme. Le candidat ne peut pas faire référence dans sa rédaction à tous les résultats d'exercices et problèmes qui ont été traités au cours de sa préparation au concours. Certains font des affirmations délirantes : "d'après le théorème de Stone-Weierstrass, $M$ est limite uniforme d'une suite de matrices inversibles".

Q4 : Cette question était grandement facilitée par l'indication de l'énoncé. Il suffisait d'utiliser l'une des expressions classiques du déterminant d'une matrice, et de montrer que toutes les applications coordonnées sont continues. Certains utilisent la suite $(PJ_kQ)_{k\in\mathbb{N}}$, ce qui ne prouve rien, car il s'agit d'une suite particulière convergeant vers $PJQ$.

Certains, malgré l'aide fournie par l'énoncé, invoquent pour le déterminant une propriété analogue à la caractérisation classique de la continuité d'une application linéaire :

$$\exists k \geq 0 \ \mid \ \forall M \in M_n(\mathbb{R}), |\det(M)| \leq k||M||$$

Propriété fausse évidemment pour $n \geq 2$, pour des rÉvisions évidentes d'homogénéitéé

Certains Écrivent :

$$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), |\det(M)| \leq n!\,||M||^n$$

et en "déduisent" la continuité de l'application déterminant. On ne peut guère en déduire que la continuité en la matrice nulle.

Q5 : Cette question est un point élémentaire du cours : il s'agit du développement du déterminant de $M$ par rapport à la $i$-ième ligne. Certains candidats se contentent de vérifier l'égalité pour une matrice particulière d'ordre 3, ce qui est désolant.

Q6 : Il s'agit encore d'une question de cours. Beaucoup de candidats croient voir le développement de $\det({}^tM)$ par rapport à la $(j-1)$-ième ligne. Certains évoquent une matrice obtenue à partir de $M$ en changeant une ligne, mais appellent encore $M$ la matrice ainsi modifiée, ce qui rend la démonstration incompréhensible. Certains écrivent : "Si la matrice $M$ a deux lignes égales, son déterminant est nul", ce qui ne résout rien.

Q7 : Certains candidats invoquent un point de cours, alors qu'une démonstration utilisant les résultats des questions 5 et 6 est explicitement demandée. Certains donnent une expression du réel x qui dépend de l'indice de ligne et de l'indice de colonne, ce qui est absurde.

Q8 : Il y a souvent beaucoup d'erreurs de signe portant sur les cofacteurs dans le développement de ce déterminant par rapport à une ligne ou une colonne. Souvent, les différentes étapes du calcul comportent des erreurs qui se compensent miraculeusement pour donner le bon résultat. Parfois, il y a une suite de déterminants sans aucun commentaire, ce qui empêche de vérifier la validité de la démonstration.

Q9 : L'expression de $MM^*$ est souvent fausse et en particulier les éléments de la première et de la dernière ligne.

Q10 : Cette question ne présentait aucune difficulté, si les questions 8 et 9 avaient été bien résolues. Certains candidats trouvent quand même le bon résultat, annoncé dans l'énoncé, alors qu'il est impossible d'y arriver en utilisant leurs résultats des questions précédentes. Certains, afin de trouver le bon résultat affirment que si la matrice $M$ est inversible, alors, son déterminant vaut 1, ou même 0.

Q11 : Il était utile d'utiliser ici le résultat de la question 3. Certains affirment que si le déterminant de la matrice $M$ est nul, alors, cette matrice comporte deux colonnes liées.

Q12 : Cette question a donné des résultats surprenants dans les copies. Bien que l'énoncé ait fourni un exemple explicite d'application de l'algorithme sur une matrice carrée d'ordre 4, l'application (incorrecte) de ce même algorithme à une autre matrice carrée d'ordre 4 a donné des résultats faux dans la majorité des copies, alors qu'il était toujours possible de calculer $\det(A)$ de façon traditionnelle pour vérifier le résultat. Certains trouvent un déterminant fractionnaire, alors que la matrice est à coefficients entiers. Inversement, il y a un grand nombre de copies où cette question est la seule qui soit traitée correctement.

Q13 : Une majorité de copies comporte juste un résultat, parfois vrai, parfois faux, sans aucun raisonnement pour le justifier. On pouvait donner une expression simplifiée du résultat, mais l'ignorance d'une telle expression ne constituait pas une gêne pour résoudre la question suivante.

Q14 : L'expression de $v_n$ est souvent entachée d'un facteur 2. Il fallait au moins vérifier l'exactitude de la formule pour $n = 2$. Certains écrivent que :

$$i^2 \leq n^2 = o(n!)$$

sans voir qu'on a pour l'expression de $u_n$ une somme comportant un nombre de termes qui dépend de $n$. Il y a quelques copies surréalistes où il est affirmé que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} \frac{\pi^2}{6}$$

alors que le premier membre est l'expression d'une suite d'entiers tendant vers $+\infty$ avec l'entier $n$. Un minimum de réflexion pendant la rédaction, et une relecture permettent normalement d'éviter ce genre d'erreur.

Q15 : Cette question (ainsi que les suivantes) est abordée par une minorité de candidats. On assiste parfois à des simulacres de démonstration.

Q16 : Dans cette question, le mécanisme de résolution est semblable à celui de la question 15, à condition toutefois de ne pas avoir résolu cette question avec la rêgle de Sarrus. La nouveauté dans la question 16 est que l'on doit poser clairement une hypothèse de récurrence, et surtout initialiser cette récurrence : il faut le faire sur les deux premiers termes.

Q17 et Q18 : Ces questions ont été non traitées ou très mal traitées la plupart du temps, souvent faute de temps. Les candidats ont souvent tenté de deviner les résultats, avec peu de succès en général. Il fallait faire des démonstrations par récurrence qui demandaient un certain soin.

## III) <u>CONCLUSION</u>

Les prestations sont globalement très décevantes de la part de candidats. Ils négligent souvent la rédaction des solutions, utilisent parfois abusivement des propriétés fausses ou hors programme et ont parfois très peu d'esprit critique sur ce qu'ils écrivent.

Concluons sur une note optimiste en constatant que nous avons eu tout de même la satisfaction de corriger un certain nombre de bonnes copies.

Rappelons que les candidats doivent bien connaître leur cours et maîtriser les techniques basiques de calcul. Seule, la pratique personnelle et régulière permet d’atteindre cet objectif. Les candidats doivent aussi s’entraîner à exposer avec clarté et rigueur les raisonnements. La confusion, l’ambiguité, voire le manque d’honnêteté intellectuelle doivent être bannis. Espérons que ces remarques pourront aider les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours.