1.2 F - MATHÉMATIQUES II - filière PSI

I) REMARQUES GENERALES

Le problème posé dans cette épreuve portait sur la résolution de l'équation de la chaleur en dimension 2. Il portait sur le calcul différentiel et intégral, et sur les séries de Fourier. Il demandait une maîtrise approfondie du programme : différentiation de fonctions, dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, fonctions de plusieurs variables, séries de fonctions, séries de Fourier, éléments de topologie.

Il fallait maîtriser certains résultats du cours : théorème de convergence dominée, formule de Parseval, théorème d'intégration terme à terme. Ces théorèmes sont souvent mal connus, et parfois inconnus des candidats. Ces derniers sont ainsi souvent dans l'incapacité de les énoncer et les appliquer correctement. Rappelons qu'il ne suffit pas de comprendre le sujet. Il faut aussi faire la preuve de ces acquisitions fondamentales. Ainsi, dans chaque situation, le candidat doit faire la preuve qu'il connaît l'énoncé exact du théorème utilisé. Il doit aussi montrer que les hypothèses de ce théorème sont bien satisfaites afin ensuite d'en tirer les conclusions souhaitées. Citer juste le nom d'un théorème, sans la moindre information sur son énoncé et sans vérifier que les hypothèses sont satisfaites, n'a pas beaucoup d'intérêt.

Ce problème a donné lieu à un effet ”tout ou rien” : soit le candidat sait faire beaucoup de questions, soit il sait en faire très peu. C'est ainsi que ceux qui réussissent la question Q1 réussissent aussi le plus souvent la question Q2.

Ceux qui réussissent la question Q4 ont de bonnes chances de réussir Q5, Q7 et Q8. Certaines fautes, qui ont lieu parfois de façon répétitive dans certaines copies, sont inexcusables.

Par exemple :

- affirmer que pour tout réel a positif ou nul, a est plus petit que son carré !
- écrire des inégalités entre nombres complexes !

Le candidat doit prendre le temps nécessaire pour réfléchir avant de rédiger. Il doit aussi prendre le temps de relire.

La prestation moyenne des candidats est décevante. Les prestations des candidats sont très variables. Il y a de nombreuses copies extrêmement faibles, dont les auteurs ne comprennent pas grand chose au problème, ni même les questions posées. En revanche, il y a un petit nombre significatif de copies ayant bien compris le problème dans son ensemble. Rappelons qu'il vaut mieux faire une rédaction de qualité des solutions que l'on sait traiter dans le temps imparti, plutôt que de vouloir, à tout prix, traiter la totalité du problème.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème.

Q1) Même pour la périodicité, certains candidats ne voient pas que la double périodicité entraîne la simple périodicité et s'engagent dans des changements de variables. La continuité sous le signe somme est mal traitée : pour employer le théorème utilisant la continuité par rapport à chaque variable de l'intégrande, il faut remarquer que les intervalles d'intégration sont compacts, ce qui n'est pas toujours fait.

Pour appliquer le théorème qui est au programme (celui dérivé de la convergence dominée), beaucoup plus rarement utilisé curieusement, les candidats se trompent souvent sur la variable de la fonction dominante (ici x). Signalons une version inédite d'un prétendu ”théorème fondamental de l'intégration” : ”L'intégrale d'une fonction continue est une fonction continue, et même dérivable” (sans aucune autre précision). Le théorème de Parseval est lui à peu près correctement utilisé en général et ses hypothèses rappelées.

Q2) Il est curieux de constater qu'une proportion importante de candidats ayant su appliquer le théorème de Parseval à la question Q1 se révèle incapable de l'appliquer à nouveau ici, alors que la question relève exactement de la même technique. On constate un simulacre de démonstration très répandu : pour "prouver" la convergence normale, on considère un réel y qui rendrait maximaux tous les $|u_m(y)|$.

Pour cette question (et aussi pour Q3, Q4, Q5), des candidats utilisent la convergence normale donnée par le cours (théorème du même nom), sans voir qu'on raisonne à y fixé, alors qu'on veut des majorations indépendantes de y.

Q3) Les solutions correctes sont très rares. En utilisant Q1 et Q2, beaucoup de candidats veulent intervertir intégrale et somme, et pour cela, prouver que la série des $|u_m|^2$ converge uniformément. Nous n'avons pas eu de réponse correcte par cette voie, les démonstrations étant souvent justes, sauf une erreur plus ou moins bien dissimulée.

Beaucoup de candidats ne maîtrisent pas la notion de convergence uniforme : on ne précise pas la variable, ni l'intervalle. Certains écrivent que la somme des carrés des modules des coefficients de Fourier converge normalement d'après le cours.

Certains affirment pour une série double, que si la série obtenue en fixant l'un ou l'autre des indices est convergente, alors, la série est convergente.

D'autres écrivent qu'une série de fonctions dont le terme général est majoré est normalement convergente.

Certains candidats s'égarent complètement, et parlent de "continuité de a_{mn}", alors qu'elle ne dépend ni de x ni de y.

On peut traiter cette question en utilisant la convergence normale, mais il faut alors la prouver, en utilisant la série dérivée par exemple, ce que font quelques candidats, alors que la plupart affirment qu'il y a convergence normale sans aucune justification.

Rappelons que la démarche qui consiste à majorer une somme infinie en vue de prouver la convergence de la série concernée n'a aucun sens. On ne peut utiliser dans une démonstration l'objet mathématique dont il faut montrer l'existence. La situation est encore aggravée dans le cas présent si le terme général de la série est complexe. Le fait de majorer le module d'une somme infinie dont on ne connaît pas l'existence ne vaut guère mieux.

Certains affirment : "u est continue, donc sa série de Fourier converge normalement vers elle".

Les candidats auraient pu facilement montrer la convergence de la série double en majorant les sommes finies des modules par le second terme de l'équation (2). Ceci n'a presque jamais été fait. Beaucoup ont préféré à tout prix utiliser celui des théorèmes d'intégration terme à terme qui ne s'applique pas naturellement ici, avec la condition de convergence uniforme.

Q4) De nombreux candidats ne tiennent pas compte de la notion de convergence d'une série double exposée dans l'énoncé et inventent leur définition personnelle, différente de celle de l'énoncé.

Les candidats ne pensent pas en général à utiliser l'hypothèse de décroissance rapide (de même que pour les deux questions suivantes), pensant sans doute qu'elle figurait dans l'énoncé à des fins décoratives, ce qui donne des affirmations dépourvues de tout caractère probant.

On écrit que pour m fixé, la série des $|a_{m,n}|^2$ converge, parce que la série des $|a_{m,n}|$ converge, en raison de l'inégalité bien connue : $x \leq x^2$!

Q5) Certains candidats pensent que $a_{m,n}(u)$ dépend de (x,y). Il y a des résultats corrects dans les copies, mais aussi des démonstrations un peu rapides où on escamote le théorème 1 rappelé dans l'énoncé. On essaie alors de démontrer la continuité de *v* directement à partir de la somme double, ce qui ne vaut rien en général.

Certains survolent les mathématiques, et écrivent des phrases du style : *v* est continue comme somme de fonctions continues.

On voit quelquefois des résultats corrects pour démontrer que *v* est continue en x, puis en y, mais ceci n'entraîne pas la continuité par rapport au couple
(x,y).

Q6) Il y a parfois des calculs formels exacts, mais sans justifications.

L'application du théorème de dérivation terme à terme est un désastre. L'énoncé correct du théorème n'est pas connu. Il est courant que les candidats pensent qu'une série normalement convergente de fonctions dérivables est dérivable. Il est vrai que la plupart du temps, les candidats ne se posent même pas la question !

Q8) Certains candidats ont donné la solution correcte suivante : pour tout couple (m,n), $a_{m,n}(u) = a_{m,n}(v)$, donc, u_m et v_m ont les mêmes coefficients de Fourier, et elles sont continues. Elles sont donc égales. On fixe le réel y. Alors, les deux fonctions $x \to u(x, y)$ et $x \to v(x, y)$ ont les mêmes coefficients de Fourier ; elles sont continues, donc d'après le cours, elles sont égales.

Q9) On trouve dans des copies des évocations du théorème de Dirichlet, mais ce théorème n'est pas au programme pour des fonctions de deux variables.

Très peu de candidats pensent à utiliser Q3, et il manque souvent une précision à la fin : il n'est pas explicitement au programme que si l'intégrale double d'une fonction continue positive ou nulle est nulle, alors, cette fonction est nulle. Pour le justifier avec des résultats du programme, il fallait donc appliquer une formule de Fubini pour se ramener au cas des fonctions d'une variable réelle.

Q10) Même pour cette question, il y a hélas beaucoup de fautes. On constate une absurdité qui revient souvent dans les copies : $a_{m,n}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}[a_{m,n}(u_0)]$! !

Q11) Cette question a été souvent mal traitée. Il fallait s'inspirer de résultats classiques connus pour des fonctions d'une variable. Il y avait une difficulté technique supplémentaire.

Q12) Cette question a permis à quelques candidats de marquer des points, en tout cas dans la partie de calcul formel. Toutefois, il est exact que la justification correcte des calculs formels demande une rédaction assez longue.

Q13) Pour une proportion importante de candidats, l'expression de la dérivée de la fonction $x \to \int_O^x f(t)dt$ f(t)dt semble être $f(x) - f(O)$, et ceci même parfois dans des copies qui sont bonnes par ailleurs.

Q14) Cette question pouvait être traitée de manière indépendante et beaucoup de candidats se sont précipités dessus. On peut l'interpréter comme une démonstration du bon travail de préparation aux concours fait dans les classes préparatoires.

Q15 et **Q16)** Ces questions ont été très peu abordées et la question Q16 pratiquement jamais.

III) CONCLUSION

Les prestations sont globalement très décevantes de la part de candidats qui négligent toutes les justifications et qui utilisent abusivement des extensions des théorèmes du programme concernant des fonctions d'une variable en les appliquant pour des fonctions de deux variables.

Concluons sur une note optimiste en constatant que nous avons eu tout de même la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies et parfois de très bonnes qui se détachent nettement des autres.

Rappelons que les candidats doivent bien connaître leur cours et maîtriser les techniques basiques de calcul. Seule, la pratique personnelle et régulière permet d'atteindre cet objectif. Les candidats doivent aussi s'entraîner à exposer avec clarté et rigueur les raisonnements. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle doivent être bannis.

Espérons que ces remarques pourront aider les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours.