

1.2 F - MATHÉMATIQUES II - filière PSI

I) REMARQUES GENERALES

Le problème posé dans cette épreuve portait sur le calcul différentiel et intégral. Il demandait une maîtrise approfondie du programme : différentiation de fonctions, dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, fonctions de plusieurs variables, recherche des extremums d'une fonction, propriété des valeurs intermédiaires, orthogonalité de fonctions pour un produit scalaire, éléments de topologie.

Le niveau des connaissances des candidats ne s'est pas toujours révélé à la hauteur des exigences du problème. On pourra en particulier déplorer qu'il ait été si difficile pour un grand nombre de candidats de calculer la dérivée première et la dérivée seconde de la fonction d'une variable réelle : $x \mapsto |x|^{2t}$, où t est un paramètre réel supérieur ou égal à 1.

Beaucoup de candidats ne sont pas capables d'énoncer des conditions suffisantes de dérivabilité d'une intégrale fonction d'un paramètre, ou s'ils les énoncent, de les vérifier concrètement sur un exemple. Il en est de même pour justifier l'existence du maximum d'une fonction numérique définie sur \mathbf{R} .

Beaucoup de candidats ne lisent pas assez attentivement l'énoncé, ce qui les conduit par exemple à faire un raisonnement par récurrence sur un paramètre t réel...Reconnaissons toutefois que certains maîtrisent bien certains outils, comme le théorème des valeurs intermédiaires, ou certaines notions de topologie, ce qui leur permet de faire la différence.

La prestation moyenne des candidats est décevante. Les performances des candidats sont très variables, dans un rapport de 1 à 50 environ. Il y a de nombreuses copies extrêmement faibles, dont les auteurs ne comprennent quasiment rien au problème, ni même aux questions posées. En revanche, il y a un nombre restreint, mais significatif de copies, en provenance de candidats ayant compris le problème dans son ensemble.

Les notes des candidats sont étalées entre 0 et 20, et la moyenne est de l'ordre de 7,25 sur 20.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème :

1) Cette question est en général correctement résolue, mais il y a quand même souvent des calculs faux, et par suite des réponses fausses. Les candidats confondent souvent le maximum d'une fonction avec le ou les points où ce maximum est atteint.

2) Cette question est rarement résolue correctement. On voit très souvent des égalités comme :

$$(-x)^{2t} = (-1)^{2t} x^{2t}, \text{ ou } |x|^{2t} = (|x|^2)^t = x^{2t}$$

En particulier, quelle est la valeur de $(-1)^{2\pi}$?

De nombreux candidats affirment que la fonction ψ est polynomiale !

Il n'est pas rare de lire l'affirmation selon laquelle la fonction $x \mapsto |x|^{2t}$ est de classe C^2 parce que la fonction $x \mapsto |x|$ est de classe C^∞ sur \mathbf{R} , et la fonction $u \mapsto u^{2t}$ est de classe C^2 sur \mathbf{R}_+ !

Les candidats voulant traiter cette question en utilisant l'exponentielle se trompent souvent dans la dérivation de la fonction $x \mapsto \ln |x|$. Il est d'ailleurs possible que les mêmes candidats sauraient

trouver correctement une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Ceci montre que beaucoup de candidats connaissent mal les fonctions puissances et ne sont pas capables de revenir à la définition en utilisant le logarithme. Remarquons que la résolution correcte de cette question était nécessaire pour pouvoir traiter les questions suivantes.

3) Compte tenu du traitement de la question 2, cette question est rarement résolue correctement. Les remarques précédentes s'appliquent encore à cette question. La fonction "signe" est rarement utilisée, ce qui occasionne une présentation maladroite des résultats (même quand ceux-ci sont exacts) et des expressions inutilement compliquées.

4) Les candidats ont souvent une connaissance très approximative des conditions pour dériver une intégrale dépendant d'un paramètre :

- ils majorent le module de la fonction, au lieu du module de la dérivée ;
- ils majorent le module de la fonction, ou le module de la dérivée par une fonction dépendant du paramètre ;
- dans une forte proportion, ils n'imaginent même pas que la dérivation sous une intégrale est soumise à des justifications.

Certains candidats évoquent la convergence normale ou uniforme, ce qui est totalement hors sujet, puisque l'entier n est fixé.

Certains candidats font de grands développements sur des séries qui convergeraient uniformément et sur la possibilité de pratiquer une intégration terme à terme, alors qu'il s'agit de sommes finies !

Certains pensent qu'une fonction 2π -périodique a nécessairement une intégrale nulle sur un segment de longueur 2π !

Certains écrivent :
$$\frac{\partial}{\partial \alpha} |P_r(x, \alpha)|^{2t} = \frac{\partial}{\partial \alpha} P_r(x, \alpha)^{2t} !$$

5) Beaucoup de candidats renoncent à traiter cette question. Quand cette question est traitée, le fait que le paramètre α soit vectoriel est rarement pris en compte, et on tente d'appliquer un théorème relatif à un paramètre réel.

6) La formule est souvent comprise. On constate toutefois de nombreuses solutions très laborieuses utilisant le théorème de Fubini. La continuité de I_t sur \mathbf{R}^n est par contre mal vue en général.

7) Malheureusement, seulement une minorité de candidats ont compris qu'il fallait choisir pour β un vecteur de la base canonique. Les solutions sont rarement convaincantes.

8) Pour pouvoir utiliser un argument de compacité, il fallait utiliser la périodicité de la fonction cosinus. Il est désolant de voir écrit dans une proportion importante de copies le fait que \mathbf{R}^n est compact. Ainsi, on affirme que toute fonction définie et continue sur \mathbf{R}^n et à valeurs dans \mathbf{R} est bornée et atteint ses bornes.

9) Cette question est très peu souvent abordée avec succès, bien qu'elle soit d'une difficulté raisonnable.

10) Cette question est très peu souvent résolue. Il fallait savoir utiliser les expressions des dérivées partielles obtenues dans la question 7) et le résultat obtenu dans la question 9).

11) Cette question a été souvent traitée, mais très rarement résolue correctement. Il fallait utiliser l'inégalité de Hölder donnée au début de l'énoncé en (1). De très nombreux candidats tentent de faire un raisonnement par récurrence comme si le paramètre t était entier, alors qu'il est réel !

12) Cette question facile a provoqué l'apparition de nombreuses fautes grossières. Certains pensent qu'une fonction périodique a toujours une valeur moyenne nulle. Beaucoup ont d'énormes difficultés pour justifier :

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx - \alpha_k) dx = 0$$

et très souvent, certains écrivent que le carré d'une somme finie est égal à la somme des carrés. Beaucoup de candidats se voient contraints d'utiliser une formule d'addition pour calculer $\sin(2k\pi - \alpha_k)$.

Certains font de grands discours avec des arguments sophistiqués pour justifier la possibilité de pratiquer une intégration terme à terme, alors qu'il s'agit de sommes finies.

On constate quelques tentatives maladroites d'utilisation du théorème de Parseval associé aux séries de Fourier, rarement convaincantes. Il est tout à fait étonnant que certains candidats aient besoin d'utiliser ce même théorème pour évaluer les intégrales :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(kx) dx \text{ et } \int_0^{2\pi} \sin^2(kx) dx$$

Le cours de mathématiques qui leur a été enseigné ne comporte pas que des théorèmes et des résultats ; il comprend aussi des calculs et des démonstrations.

13) Cette question simple a été souvent très mal résolue. On voit souvent affirmé que \mathbf{R} est compact, qu'une fonction réelle continue sur \mathbf{R} est bornée et atteint ses bornes, ou qu'une fonction réelle continue et bornée sur \mathbf{R} atteint ses bornes. Beaucoup de candidats confondent les notions de borne supérieure et de maximum.

14) Cette question est souvent bien traitée, en utilisant les résultats des questions 12) et 13).

15) Cette question est assez souvent bien traitée. Toutefois, il manque souvent l'argument de continuité : une fonction positive ou nulle et d'intégrale nulle sur un segment n'est pas forcément nulle. Certains commettent une faute de logique : ils choisissent un paramètre α qui leur convient, alors que celui-ci est fixé dans l'énoncé.

16) Il y a trop souvent une confusion entre les deux axes. La notion de fermé est souvent mal comprise. Une partie d'un compact n'est pas forcément compacte. L'image réciproque d'une partie compacte par une fonction continue n'est pas forcément un compact. Beaucoup de candidats pensent de façon plus ou moins explicite qu'une fonction continue sur $[0, 1]$ a un ensemble fini de zéros, ou bien ne prend une valeur donnée (ici λS) que sur un ensemble fini, ou qu'un compact est un ensemble de points isolés.

17) Il y a de nombreuses fautes de raisonnement commises lors de l'application du théorème des valeurs intermédiaires, comme :

$$0 \leq |P(x)| \leq S, \text{ et } 0 < \lambda < 1, \text{ donc, il existe } x \text{ tel que } |P(x)| = \lambda S.$$

Il y a aussi des réponses correctes et rigoureuses, récompensées à juste titre.

18) L'inégalité de Cauchy-Schwarz est souvent attribuée à d'autres mathématiciens comme Schwartz, ou Rolle, ou Leibniz. Beaucoup de candidats ont résolu la question partiellement.

19) Il y a beaucoup de simulacres de démonstration pour cette question.

20) Beaucoup de candidats ne montrent que la première inégalité.

21) Cette question est rarement abordée.

Il est à noter que les solutions des quatre dernières questions ont souvent été traitées de manière rapide et superficielle, faute de temps.

III) CONCLUSION

Concluons sur une note optimiste en constatant que nous avons eu tout de même la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies, et parfois de très bonnes qui se détachent nettement des autres.

Rappelons que les candidats doivent bien connaître leur cours et maîtriser les techniques basiques de calcul. Seule une pratique personnelle et régulière permet d'atteindre cet objectif.

Les candidats doivent aussi s'entraîner à exposer avec clarté et rigueur les raisonnements. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle doivent être bannis.

Espérons que ces remarques pourront aider les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours.