

MATHEMATIQUES II - filière PSI

I) REMARQUES GENERALES

Le problème posé à cette épreuve proposait d'étudier des applications de la notion de supplémentaire d'un sous-espace vectoriel dans un espace vectoriel, et d'applications de cette notion en algèbre linéaire, en analyse, et en géométrie.

Le sujet était d'une longueur raisonnable, et le niveau de difficulté des questions était variable. Il y avait des questions très faciles, d'autres de niveau moyen, et d'autres qui, sans être très difficiles, exigeaient une certaine réflexion, du soin et de la rigueur.

Etant donnée la simplicité de beaucoup de questions, les correcteurs ont exigé une rédaction claire et rigoureuse, l'exactitude des résultats, et ont sanctionné les fautes de calcul. L'énoncé exigeait clairement que les théorèmes utilisés soient énoncés avec précision, et que leurs hypothèses soient soigneusement vérifiées.

La prestation moyenne des candidats est décevante. Les parties du programme concernées sont souvent insuffisamment maîtrisées.

Les faiblesses les plus marquantes relevées sont les suivantes :

Les arguments un peu abstraits d'algèbre linéaire, comme ceux qui étaient attendus aux questions 8, 17, 18 sont hors de portée de la grande majorité des candidats. Nous avons noté une très grande tentation d'appliquer en dimension infinie des arguments spécifiques à la dimension finie. La partie III, généralement très mal traitée, a montré dans beaucoup de copies la méconnaissance des notions de bases et de combinaisons linéaires en dimension infinie. Nous avons noté une tendance à fournir des bribes d'arguments, laissant au correcteur le soin de les compléter pour les organiser en une solution convaincante, procédé qui, bien entendu, n'est pas rentable en termes de notation

La dernière question (N° 19), de géométrie élémentaire, a été très peu abordée, et jamais résolue. Aucun candidat n'a vu le lien avec la question précédente.

Si les candidats avaient l'idée de penser à une matrice simple, comme la matrice carrée A d'ordre 2, dont le seul terme non nul est $a(1,2)=1$, ils éviteraient d'écrire bien des affirmations fausses comme ils ont pu le faire pour les questions 5 et 8 en particulier.

Rappelons aux candidats le danger qu'il peut y avoir à chercher les solutions des questions dans n'importe quel ordre, sans tenir compte de la structure logique de l'énoncé. Les solutions trouvées dans ces conditions ont toutes les chances d'être inadaptées ou fausses. Certains, rares heureusement, rédigent les questions dans un ordre différent de l'énoncé, et admettent le résultat de certaines d'entre elles, sans être conscients du fait qu'ils tentent de montrer le résultat d'une question en admettant le résultat d'une autre question qui est postérieure dans l'énoncé !

Rappelons aussi le danger qu'il peut y avoir à vouloir à tout prix fournir une solution pour chaque question, indépendamment de la qualité de ce que l'on a à proposer, attitude gravement préjudiciable pour la note finale. Il vaudrait bien mieux que chaque candidat se limite aux questions qui sont à sa portée, dans le temps imparti, et propose une solution rigoureuse, sans compromis sur la qualité.

Les notes des candidats sont bien étalées entre 0 et 20.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème :

Partie I :

1) Rappelons qu'il ne suffit pas que l'intersection des sous-espaces vectoriels F et G soit réduite au vecteur nul pour que G soit un supplémentaire de F .

2) L'énoncé demandait explicitement des solutions réelles, et trop de candidats ont fourni des solutions complexes non réelles.

3) Beaucoup de solutions longues et compliquées aboutissent à des conclusions absurdes. Beaucoup n'ont pas compris la question et donnent une matrice A dont les coefficients ne sont pas toujours définis, et dépendent de f . Certains donnent une matrice dont les coefficients ne sont pas tous réels.

4) On voit souvent la même erreur que pour la question 1).

Partie II :

5) Il y a beaucoup d'erreurs de calcul pour cette question. Les notions de "racine simple" et d'ordre de multiplicité ne sont pas toujours comprises, d'où une application erronée du théorème sur la caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide des polynômes annulateurs.

6) Cette question est souvent bien vue, mais pas toujours résolue avec suffisamment de simplicité. Dans une proportion significative des copies, les candidats pensent à tort qu'un sous-espace vectoriel stable est forcément un sous-espace propre.

7) Beaucoup de candidats pensent qu'il est possible qu'un plan ait pour supplémentaire un autre plan, alors que l'espace vectoriel est de dimension 3.

8) Cette question s'est révélée trop abstraite pour la majorité des candidats. Une minorité de candidats a traité correctement cette question, et la majorité des candidats n'a fait que des simulacres de démonstration, en ne faisant parfois que paraphraser l'énoncé.

Partie III :

9) Cette question est très rarement traitée correctement. Certains candidats tentent de faire une récurrence et s'enlisent, laissant parfois au correcteur le soin de terminer. Certains élèves pensent qu'un polynôme à deux variables qui a une infinité de zéros est identiquement nul. Il serait bon de penser par exemple à l'équation cartésienne d'une droite.

10) Le caractère linéaire des applications considérées était trivial, la stabilité de F l'était beaucoup moins.

11) Les candidats confondent fréquemment le noyau de l'application considérée avec une partie basique de ce noyau.

12) Le fait que F soit somme des deux sous-espaces vectoriels xyF et $\text{Ker}(\Phi \sim)$ est souvent vu par les candidats qui ont traité correctement la question 11), mais le fait que cette somme soit directe est rarement traité.

13) Peu de candidats se soucient des trois parties que comporte la question. La fonction f , élément de F , est souvent perçue comme une application linéaire. Il y a finalement très peu de réponses satisfaisantes.

14) Très peu de candidats écrivent correctement le changement de variables, et trouvent la bonne égalité.

15) Les réponses sont rarement convaincantes, et beaucoup de candidats pensent avoir montré l'égalité des ensembles $L[(x^2 - y^2)F]$ et uvF , alors qu'ils n'ont montré en fait qu'une inclusion.

16) Le résultat est deviné par une partie des candidats, mais l'argumentation fournie est rarement complète.

Partie IV :

17) Le fait que la deuxième propriété implique la première est rarement résolu.

18) Peu de candidats sont capables d'utiliser la fonction ϕ proposée pour montrer que la première propriété implique la seconde.

19) Très peu de candidats voient le lien avec ce qui précède, et aucun ne parvient au résultat. Est-il si difficile d'écrire l'expression de la distance d'un point à un plan, par exemple ?

III) CONCLUSION

Concluons sur une note optimiste en constatant que nous avons eu tout de même la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies, et parfois de très bonnes. Rappelons que les candidats doivent bien connaître leur cours, et maîtriser les techniques basiques de calcul, et que seule, la pratique personnelle et régulière permet d'atteindre cet objectif. Les candidats doivent aussi s'entraîner à exposer avec clarté et rigueur les raisonnements. La confusion, l'ambiguïté, voire le manque d'honnêteté intellectuelle doivent être bannis. Espérons que ces remarques pourront aider les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours.