

## MATHEMATIQUES II - filière PSI

### **I) REMARQUES GENERALES**

Le problème posé à cette épreuve proposait d'étudier des suites réelles et matricielles.

Le sujet était d'une longueur raisonnable, et le niveau de difficulté des questions était modéré. Il y avait un nombre limité de questions un peu plus difficiles (N° 7, 11, 12, 16, 18). Aucune de ces questions n'était hors de portée des candidats, et toutes ont été résolues par une proportion variable mais significative de candidats. Quelques questions ont fait l'objet de solutions astucieuses.

Etant donnée la simplicité de beaucoup de questions, les correcteurs ont exigé une rédaction claire et rigoureuse, et l'exactitude des résultats, et ont sanctionné les fautes de calcul.

La prestation moyenne des candidats est honorable. La partie du programme concernée, essentiellement le calcul matriciel, est assez bien maîtrisée.

#### Les faiblesses les plus marquantes

Seulement une petite moitié des candidats est capable de résoudre une équation du second degré sans se tromper, même avec des coefficients et des racines réelles. On n'ose pas imaginer ce qu'aurait donné une équation à coefficients complexes.

Moins de la moitié des candidats a retenu l'énoncé concernant la division euclidienne des polynômes. Les conditions de degrés sont souvent fantaisistes. Certains pensent que le degré d'un produit de polynômes est le produit des degrés. Certains pensent que le degré du reste est inférieur au degré du quotient. D'autres pensent que le degré du reste est inférieur au degré du dividende. Certains font des divisions euclidiennes fausses, car ils ne savent même pas calculer correctement un quotient de deux monômes.

Certains candidats ne savent pas faire correctement un raisonnement par récurrence. Si on montre que les propriétés  $P(n)$  et  $P(n+1)$  impliquent  $P(n+2)$ , pour initialiser la récurrence, il faut montrer que  $P(0)$  et  $P(1)$  sont vraies.

Certains candidats n'hésitent pas à écrire des fractions rationnelles de matrices. Que faut-il comprendre quand on voit  $B/A$  ? S'agit-il de  $BA^{-1}$  ou  $A^{-1}B$  ?

Quand certains théorèmes portent un nom, il serait souhaitable qu'il soit correctement attribué et orthographié. A la place du théorème de Cayley-Hamilton, nous avons eu droit entre autre à ceux de David Hamilton, Cailley-Hamilton, Kelly-Amilton, Cayley-Amilton, et même Hilbert-Dirac.

Rappelons aux candidats le danger qu'il peut y avoir à chercher les solutions des questions dans n'importe quel ordre, sans tenir compte de la structure logique de l'énoncé. Les solutions trouvées dans ces conditions ont toutes les chances d'être inadaptées ou fausses. Certains, rares heureusement, rédigent les questions dans un ordre différent de l'énoncé, et admettent le résultat de certaines, sans être conscient du fait qu'ils tentent de montrer le résultat d'une question en admettant le résultat d'une autre question qui est postérieure dans l'énoncé !

Les notes des candidats sont bien étalées entre 0 et 20, et la moyenne est honorable.

### **II) REMARQUES PARTICULIERES**

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème.

1) Trop de candidats se sont lancés dans des calculs trop compliqués, alors qu'une petite récurrence donnait aisément le résultat.

- 2) Cette question a été en général bien traitée.
- 3) Il y a beaucoup de solutions correctes. Le seul défaut constaté est parfois une présence de calculs trop compliqués.
- 4) Cette question est souvent bien vue ; signalons toutefois l'erreur : «  $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$  ».
- 5) Cette question a été réussie d'une manière très variable.
- 6) On obtient soit une bonne solution en trois lignes, soit des pages de calculs très incertaines.
- 7) On voit trop souvent des tentatives du style "On voit que...", ou "On peut vérifier simplement que", non récompensées évidemment. La détermination des deux suites de Fibonacci était inutile.
- 8) Cette question a été en général bien traitée.
- 9) Cette question a été bien vue en général, mais souvent, on ne voit pas que  $C_n = 0$ .
- 10) Cette question a été en général bien traitée.
- 11) Les conditions sur les degrés sont rarement exactes. La justification du fait que  $R(U) = 0$  implique  $R = 0$  n'est faite que dans une minorité des copies. Il y a souvent confusion entre polynôme caractéristique et polynôme minimal. Certains pensent que pour une matrice carrée d'ordre 2, le polynôme minimal est toujours égal au polynôme caractéristique. Les discours sur les polynômes annulateurs sont souvent à double tranchant, et moins rémunérateurs qu'une simple vérification élémentaire.
- 12) Ceux qui ont traité cette question, une petite moitié des candidats, se sont partagés entre amateurs de suites télescopiques et amateurs de suites géométriques. Dans les deux cas, un certain dilettantisme a fait que le résultat trouvé était rarement le bon.
- 13) Cette question a été en général bien traitée.
- 14) Il fallait justifier l'exposant  $p$ , et non pas en remplaçant  $U$  par  $U^p$ .
- 15) Il fallait justifier, mieux que "par identification", en utilisant une base.
- 16) Peu de candidats ont songé à utiliser les suites  $(f_{3n})$  et  $(g_{3n})$ , et ceux-ci ont été récompensés.
- 17) Il est triste de constater que si peu de candidats savent trouver correctement les racines d'une équation du second degré dont les coefficients sont parmi -1 et 1. Il fallait donner l'inverse de  $I - xU$  sous la forme demandée, qui seule était rétribuée.
- 18) Les réponses ressemblent trop souvent à une plaisanterie. Une idée fausse et solidement ancrée dans la tête de beaucoup de candidats consiste à croire que tout rayon de convergence demandé dans un problème de concours est égal à 1, quelle que soit la série donnée.
- 19) Dans le même ordre d'idée, toute limite demandée est nécessairement égale à 0. La justification de l'analogie avec les suites géométriques est rarement donnée.
- 20) Cette question est la moins abordée de toutes. La qualité des solutions données est très variable.

### **III) CONCLUSION**

Concluons sur une note optimiste en constatant que nous avons eu tout de même la satisfaction de corriger un nombre significatif de bonnes copies, et parfois de très bonnes. Espérons que ces remarques pourront aider les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours.