1.2 – Epreuves écrites

1.2 F - MATHEMATIQUES II - filière PSI

I) <u>REMARQUES GENERALES</u>

Le problème posé à cette épreuve proposait d'étudier l'approximation des solutions réelles d'une classe d'équations différentielles linéaires du second ordre.

Le sujet était d'une bonne longueur, et portait sur l'analyse et sur l'algèbre linéaire. Il comportait aussi bien des questions théoriques de niveau de difficulté variable que des questions plus techniques qui exigeaient un certain soin dans les calculs.

Rappelons d'abord aux futurs candidats quelques généralités.

Il est important de soigner la rédaction, les démonstrations et les calculs. Il ne s'agît pas seulement de comprendre le sujet, mais de faire la preuve de cette compréhension. Pour pouvoir rédiger une solution de qualité, il est nécessaire de bien connaître et maîtriser les notions fondamentales, les définitions et les théorèmes du programme. Trop de candidats manquent de rigueur, ont une connaissance beaucoup trop approximative de certains résultats fondamentaux de leur cours, par exemple en ce qui concerne l'analyse réelle, les équations différentielles, l'intégration des fonctions, l'algèbre linéaire.

Les trois défauts constatés les plus courants sont d'une part le manque de clarté ou d'explications dans les questions délicates, d'autre part le "grappillage" de questions insignifiantes, et enfin le manque de soin dans la rédaction et les calculs. Trop de candidats manquent de rigueur dans les questions théoriques, ou manquent d'esprit de synthèse dans certaines questions où il faut utiliser les résultats déjà obtenus. Il en a été ainsi en particulier pour la question I-3-c, quasiment jamais résolue complètement.

Rappelons aux candidats le danger qu'il peut y avoir à chercher les solutions des questions dans n'importe quel ordre, sans tenir compte de la structure logique de l'énoncé. Les solutions trouvées dans ces conditions ont toutes les chances d'être inadaptées ou fausses. Trop de candidats veulent participer à toutes les questions, ce qui se fait au détriment de la qualité des solutions, ce qui est pourtant le point essentiel. Parfois, la méthode utilisée est correcte, mais inadaptée, ce qui conduit à une solution trop longue et un résultat trop compliqué, comme par exemple pour la question I-1-b. Certains candidats font des simulacres de démonstration menant par miracle au résultat annoncé, ceci particulièrement pour les questions où la réponse est donnée dans l'énoncé. D'une manière générale, il est conseillé de jouer la carte de l'honnêteté. Certains candidats font preuve d'un laisser aller et d'un manque de rigueur grave. C'est ainsi qu'un certain nombre d'entre eux ignorent la présence des valeurs absolues d'un bout à l'autre du problème.

Rappelons le rôle essentiel joué par la réflexion préalable et le travail au brouillon, avant de procéder à la rédaction définitive. Les copies confuses ou mal présentées sont évidemment pénalisées, et les travaux bien conçus et bien présentés sont récompensés.

Certains candidats semblent déstabilisés dès la première question un peu difficile. Rappelons qu'il est toujours possible d'admettre le résultat d'une question sans démonstration, et qu'il y avait dans ce problème de nombreuses questions de niveau de difficulté faible ou moyen, où la plupart des candidats pouvaient faire la preuve de leur savoir faire.

Enfin, il serait sage de la part des candidats de se montrer plus circonspects lorsqu'ils pensent - souvent hâtivement - avoir détecté une erreur d'énoncé, alors qu'ils devraient avoir plus d'esprit critique sur leur travail personnel.

Malgré un barème généreux, la moyenne générale est très inférieure à dix, et les bonnes notes sont rares.

II) <u>REMARQUES PARTICULIERES</u>

Voici maintenant quelques remarques spécifiques concernant les questions du problème :

I-1-b) : les solutions sont trop souvent compliquées ou fausses. La méthode de variation des constantes est trop souvent employée, alors qu'elle est inadaptée ici. Les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = -1$ sont souvent non traités, et même pas évoqués, alors que $\alpha^2 - 1$ figure au dénominateur dans le résultat.

I-2-a) : beaucoup de candidats écrivent qu'une fonction positive ou nulle d'intégrale nulle est nulle sans préciser davantage ; la plupart ont beaucoup de mal à montrer que si $u'^2 + pu^2$ est nulle et si $u(0) = 0$, alors, u est nulle. Certains divisent par p sans se préoccuper de la nullité éventuelle. La plupart font une dichotomie erronée : "ou bien p est nulle, ou bien elle ne s'annule pas".

I-2-b) : le lien entre les solutions de l'équation complète et de l'équation homogène est souvent inexpliqué ; on argue souvent du théorème de Cauchy ou Cauchy-Lipschitz, alors que précisément, il ne s'applique pas ici.

I-3-a) : une erreur de logique fréquente est : "non($\forall$ x P(x))" serait équivalente à "$\forall$ x (nonP(x))". La nullité de g sur I est assez souvent vue, mais l'évocation de "(u_1, u_2) libre" est très rare, et le souci de "$(u_1, u_2)(0) \neq (0, 0)$" est rarissime.

I-3-b) : cette question est bien traitee en général, mais certains écrivent n'importe quoi avec des coefficients indéterminés pour U et B.

I-3-c) : cette question n'est quasiment jamais traitée correctement. Les candidats ne comprennent pas qu'il s'agît de montrer l'existence d'une solution (l'unicité découlant de la question I-2-b). Ils ne comprennent pas qu'il faut justifier l'existence de u_1, u_2, et v. La plupart utilisent dans leur "démonstration" les objets dont il faut montrer l'existence.

II-1-b) : seule, une petite minorité de candidats perçoit l'homogénéité, les autres écrivent n'importe quoi. Certains disent que c'est du cours ("norme subordonnée") ; ils ne comprennent pas que l'énoncé demande une démonstration, non une référence.

II-1-c) : on constate quelques confusions avec la norme euclidienne. Certains candidats, visiblement embarrassés par les valeurs absolues, les ignorent superbement. Le sup de $|\Sigma a_{i,j} x_j|$ est parfois considéré comme "évidemment" égal à $|\Sigma a_{i,j}|$

II-1-d) : une minorité de candidats songent au vecteur $-X$; ceux qui utilisent la définition générale de l'injectivité s'en sortent mieux, les autres écrivant souvent n'importe quoi. L'équivalence valable ici entre "injectif" et "surjectif" est généralement connue. On voit trop souvent "$A^{-1} A = I \geq 0$ et $A \geq 0 \Rightarrow A^{-1} \geq 0$"

II-2-a) : très peu de candidats font une démonstration correcte. Certains font un raisonnement par l'absurde qui serait correct si les coefficients diagonaux de H étaient strictement positifs. Ils divisent froidement les membres d'une inégalité par h_k qui est positif ou nul (ou sans commentaires), sans craindre d'ailleurs de s'autoriser à utiliser à la question suivante le cas particulier $h_k = 0$.

II-2-b) : trop souvent, les candidats prétendent que A+H est inversible car A et H le sont.

II-3-b) : on constate encore l'embarras des candidats dû aux valeurs absolues. La faute la plus courante est : "$v_i \leq w_i \Rightarrow | v_i | \leq | w_i |$ ".

II-4-a) : beaucoup de candidats font un amalgame entre les connaissances sur les suites récurrentes et celles sur les équations différentielles linéaires, d'où certaines solutions délirantes. Certains ne savent que faire d'une racine double. La notion de suite arithmétique est bien mal connue.

II-4-c) : on constate souvent des fautes de calcul à cause d'une confusion entre l'indice muet k et le paramètre n.

II-4-d) : question peu souvent résolue, à cause entre autres des échecs aux questions précédentes.

III-1) : certains invoquent un développement limité ou la formule de Taylor-Young, alors qu'il s'agît de démontrer une propriété (majoration) globale sur un intervalle, établissant ainsi qu'ils n'ont pas compris la notion même de développement limité (propriété locale).

Certains candidats donnent des formules de Taylor-Laplace erronées, d'autres donnent une formule de Taylor-Lagrange avec un reste avec $u^{(4)}(t)$, d'autres font allusion à une formule de Taylor avec reste intégral sans la donner explicitement ou majorent le reste en ignorant les valeurs absolues.

III-2-a) : certains candidats pensent que le simple fait de donner une expression de la dérivée quatrième de u constitue une preuve de son existence.

III-2-b) et III-2-c) : ces questions ont été peu souvent abordées et encore moins souvent résolues, car le temps a fait défaut aux candidats.

III) CONCLUSION

Concluons sur une note optimiste en constatant que nous avons eu tout de même la satisfaction de corriger un certain nombre de bonnes copies, dont un petit nombre de très bonnes. Espérons que ces remarques pourront aider les candidats à mieux se préparer aux épreuves des prochains concours.