

base plus adaptée aux données de la question. La majorité des candidats a préféré passer à la question 8 ; parmi ceux qui ont abordé la question, une partie significative a produit un argument satisfaisant.

**Q8** - Dans une écrasante majorité, les candidats répondent à cette question en utilisant la formule du binôme, sans remarquer que  $u$  et  $v$  ne sont pas supposés commuter. Une récurrence sur  $k$  donnait facilement l'existence ; les correcteurs ont généreusement noté des arguments moins formalisés mais corrects sur le fond. L'unicité, qui se ramenait à la détermination d'un polynôme réel par la donnée de la fonction polynomiale associée, a très rarement été rédigée de façon convaincante.

**Q9** - Dans beaucoup de copies, la relation  $(u + tv)^p = 0$ , qui est un passage obligé, est à nouveau incorrectement justifiée par le caractère nilpotent d'une combinaison linéaire d'endomorphismes nilpotents. L'argument d'unicité est rarement explicité.

**Q10** - La première partie de la question est souvent traitée. Cependant, les propriétés de la trace sont rarement explicitées et certains candidats se trompent sur le nombre de termes de la somme. La deuxième partie est traitée dans de bonnes copies.

**Q11-12** - Ces deux questions concluent la partie III. Elles nécessitent une bonne compréhension des objets introduits et n'ont souvent reçu que des bribes de solution. Le fait que l'espace soit de dimension finie a rarement été invoqué pour justifier l'argument de biorthogonalité.

**Q13** - Cette question, très simple, puisque tous les ensembles considérés sont des noyaux ou des images d'applications linéaires naturelles, a été fréquemment abordée, souvent avec un succès partiel. Beaucoup de candidats ont cependant fourni des démonstrations lourdes, voire incomplètes ou fausses (problèmes de typage sur l'espace ambiant).

**Q14** - Cette question reposait sur deux applications successives du théorème du rang. Elle n'a été bien traitée que dans très peu de copies. Les correcteurs déplorent plusieurs solutions parfaitement fantaisistes, dans lesquelles il est difficile de voir autre chose que des tentatives d'escroquerie.

**Q15-16** - Ces questions n'étaient pas difficiles pour qui avait assimilé la définition du produit tensoriel. Elles ont cependant rarement été bien traitées.

**Q17** - L'argument de valeur propre a parfois été vu. On note par ailleurs, dans un certain nombre de réponses, l'apparition d'objets sans signification (puissance  $p$ -ième d'un vecteur).

**Q18** - Question assez formelle, qui pouvait se traiter directement ou via une représentation matricielle par blocs. Beaucoup de candidats ont présenté ici un discours peu consistant.

**Q19** - Des candidats en petit nombre ont su analyser les inégalités établies précédemment. La suite du problème n'a donné lieu qu'à du grappillage.

## 2.5 Mathématiques 2 - filière PC

### 2.5.1 Généralités et présentation du sujet

L'objectif de ce problème était de montrer que l'ensemble des fonctions de la forme :

$$x \mapsto P(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad P \in \mathbb{R}[X],$$

est dense dans l'espace des fonctions continues et de carré intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour éviter d'excessives difficultés techniques, on se limitait à approcher les fonctions continues, paires et support compact.

Le sujet avait été conçu pour être extrêmement progressif et balayer un grand nombre de chapitres du programme : fonctions d'une variable réelle, intégration, séries numériques et entières, produits scalaires et espaces euclidiens, espaces normés. Toute sa première partie (7 questions) est constituée uniquement de questions de cours ou très proches du cours. La deuxième partie (10 questions), consacrée à l'étude d'un espace de fonctions de carré intégrable pour un certain poids, et du produit scalaire associé,

exploite largement le cours d'analyse à une variable réelle. Elle demandait un peu plus d'initiative, tout en restant largement accessible. Le niveau de difficulté augmentait significativement dans la dernière partie, afin de permettre aux meilleurs candidats de s'exprimer. Les trois quarts des points du barème étaient concentrés sur les deux premières parties : il était donc possible d'obtenir une bonne note sans aborder la dernière partie.

Cette année encore, le jury a eu plaisir à lire des copies bien rédigées et clairement présentées, qui manifestaient une bonne compréhension du programme, voire une véritable autonomie intellectuelle. À l'inverse, les copies des candidats faisant preuve de négligence ou d'à-peu-près ont été corrigées sans indulgence.

### 2.5.2 Analyse détaillée des questions

**Q1** - Cette première question ne présentait pas de difficulté, mais elle a été maltraitée par un nombre non négligeable de candidats. Parmi les affirmations fausses le plus souvent lues, citons :

- la fonction  $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  (ou : se prolonge continûment en 0), donc « il n'y a pas de problème en 0 »,
- $t^{x-1}e^{-t} \sim e^{-t}$ , ou  $t^{x-1}e^{-t} = O(e^{-t})$ , quand  $t \rightarrow +\infty$ .

De nombreux candidats perdent du temps à discuter selon la position de  $x$  par rapport à 1. Quelques-uns reproduisent, bien qu'elle ne soit pas demandée, la preuve de la continuité de la fonction  $\Gamma$  sur  $]0, +\infty[$ , mais beaucoup d'entre-eux omettent de justifier l'intégrabilité de la fonction dominante, ce qui revient à ne rien montrer du tout. Enfin, peu de candidats ont justifié la *stricte* positivité de la fonction  $\Gamma$ , se contentant d'un argument vague de « positivité de l'intégrale ». Dans le cadre du programme, il fallait indiquer que la fonction  $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$  était *continue*, positive et non identiquement nulle (ou bien sûr strictement positive).

**Q2** - Cette question a été le plus souvent bien traitée. Le jury attendait bien entendu le contrôle du terme tout-intégré  $[-t^x e^{-t}]_\varepsilon^A$  quand  $A \rightarrow +\infty$  (souvent bien vu) et  $\varepsilon \rightarrow 0$  (assez souvent négligé).

**Q3** - Certains candidats, soucieux de ne pas utiliser une « règle de d'Alembert adaptée aux séries entières », reviennent au cadre des séries numériques. Pourquoi pas, mais hélas, dans un certain nombre de cas, cela ne fait que révéler une mauvaise compréhension de cette règle : oubli des valeurs absolues, oubli de considérer la *limite* de  $\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n} \right|$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , mauvaise exploitation de cette limite.

Finalement, un simple «  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1$  donc le rayon de convergence vaut 1 » aurait été éventuellement discutable, mais plus efficace. Certains candidats écrivent également  $a_n = \frac{(n+\alpha)!}{n!}$  sans se soucier du fait que  $\alpha$  n'est pas supposé entier.

**Q4** - Cette question a rarement été intégralement bien traitée. Pour justifier la permutation des symboles, il fallait justifier la convergence de la série de terme général  $\int_0^{+\infty} \left| \frac{t^{n+\alpha} e^{-t}}{n!} x^n \right| dt$ , qui découlait de la convergence *absolue* de la série entière  $\sum a_n x^n$  en tout point de  $] -1, 1[$ , ce que très peu de candidats ont vu. La convergence uniforme ou normale sur  $] -1, 1[$  de la série entière  $\sum a_n x^n$  est souvent mentionnée, alors que d'une part elle est fautive, et que de toute façon elle n'a guère de rapport avec l'intervention d'une somme et d'une intégrale dont la variable est  $t$ . Certains candidats, plutôt que de suivre l'indication de l'énoncé, ont préféré utiliser le développement en série entière de la fonction  $x \mapsto (1-x)^{-\alpha-1}$  sur  $] -1, 1[$ , solution que le jury a bien sûr accepté dès lors que suffisamment de

détails étaient donnés.

**Q5** - Cette question de cours n'a pas eu beaucoup de succès : très peu de candidats écrivent que *comme  $F$  est de dimension finie*, on a  $E = F \oplus F^\perp$ , ce qui permettait ensuite de définir  $\pi_F$ . Au lieu de cela, le jury a souvent lu des formulations dénuées de sens (« le projeté orthogonal d'un vecteur sur  $F$  est sa composante dans  $F$  ») ou des confusions sur la nature des objets (« le projeté orthogonal d'un vecteur sur  $F$  est la plus petite distance à un vecteur de  $F$  »).

**Q6** - Cette question de cours a, elle aussi, été très rarement bien traitée, beaucoup de candidats se limitant à indiquer qu'il s'agit d'une propriété du cours. Il fallait essentiellement expliquer que  $\langle \pi_F(x), e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle$  pour  $1 \leq i \leq n$ . Certains candidats ont donné des preuves correctes en supposant  $E$  de dimension finie, qui ont été partiellement valorisées.

**Q7** - Cette question de cours a été mieux traitée que les deux précédentes, mais l'argument essentiel ( $\pi_F(x)$  et  $x - \pi_F(x)$  sont orthogonaux) n'apparaît pas toujours clairement. Un nombre non négligeable de candidats pense que  $x$  et  $\pi_F(x)$  sont orthogonaux.

**Q8** - Les candidats obtiennent en général l'inégalité  $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$ , mais beaucoup appliquent hélas ensuite la valeur absolue à cette inégalité pour obtenir « en force » le résultat.

**Q9** - Dans cette question, le jury a constaté une *recrudescence sans précédent* de l'usage imprudent de la notation  $\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)dx$  avant d'avoir justifié la convergence de l'intégrale. Il est vrai que, « dans la vraie vie », on montre souvent qu'une fonction *positive* est intégrable en majorant son intégrale (qui existe *a priori* dans  $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ ) par une quantité finie. Toutefois, ce genre de rédaction n'est pas dans l'esprit du programme de la filière PC, et l'argument devient franchement folklorique en l'absence de l'hypothèse de positivité, ce qui n'émeut guère un certain nombre de candidats pour qui les statuts des intégrales  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha e^{-x} x^\alpha f(x)g(x)dx$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha e^{-x} x^\alpha f(x)^2 dx$  ne sont pas fondamentalement différents. Une rédaction plus soignée (majoration de  $|x^\alpha e^{-x} f(x)g(x)|$  pour  $x > 0$ ) était ici attendue.

**Q10** - Même remarque qu'à la question précédente.

**Q11** - Le plus simple était de constater que, pour tout entier  $n \geq 0$ , la fonction  $t \mapsto t^n$  est élément de  $E_\alpha$  grâce à la question **Q1**, et de conclure alors grâce à la question **Q10**. Beaucoup de candidats se perdent dans des rédactions inutilement longues et compliquées. Signalons également l'identité fantaisiste

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i x^i \right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 x^{2i},$$

trop fréquemment trouvée dans les copies.

**Q12** - Question le plus souvent très bien traitée.

**Q13** - La façon la plus simple de traiter cette question était d'utiliser la formule de Leibniz. Faute d'y avoir songé, de nombreux candidats se sont lancés dans des récurrences pesantes et en général incomplètes, voire franchement malhonnêtes : certains candidats ne parvenant pas à conclure pensent s'en sortir en expliquant « qu'on pourrait montrer, par une *autre* récurrence, que... ». Tout cela a inévitablement été sanctionné. Signalons enfin que  $n + \alpha$ , pas nécessairement entier, ne peut être le degré d'aucun polynôme.

**Q14** - Pour montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha e^{-x} f(x)^2 dx = 0 \Rightarrow f = 0$ , beaucoup de candidats oublient de mentionner la continuité de la fonction  $x \mapsto x^\alpha e^{-x} f(x)^2$ , en plus de sa positivité. Davantage encore oublient de justifier que si  $f$  est nulle sur  $]0, +\infty[$ , elle l'est sur  $[0, +\infty[$  par continuité. Signalons enfin un curieux argument basé sur le fait « qu'un polynôme (lequel ?) ayant une infinité de racines est nul ».

**Q15** - Mêmes remarques qu'à la question **Q13**.

**Q16** - D'assez nombreux candidats ont bien traité cette question, en effectuant  $n$  intégrations par parties successives, et en notant que les termes tout-intégrés étaient nuls grâce à la question précédente.

**Q17** - Cette question a donné lieu à d'assez nombreuses escroqueries pour faire surgir miraculeusement la factorielle de  $n$ . Pour la traiter correctement, il fallait disposer du degré et du coefficient dominant du polynôme  $\psi_n$ .

**Q18** - Cette question délicate a rarement été abordée avec succès.

**Q19** - Beaucoup de candidats concluent abusivement en conjecturant (ce qui est vrai !) que la somme de la question précédente vaut  $\|f_k\|_\alpha^2$ .

Les questions suivantes ont rarement été abordées.

## 2.6 Mathématiques 1 - filière PSI

### 2.6.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet propose la preuve du théorème suivant.

*Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie  $n$ . Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des endomorphismes de  $E$ . On suppose que tous les éléments de  $V$  sont nilpotents et que  $V$  est de dimension  $n(n-1)/2$ . Alors il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de tous les endomorphismes de  $V$  est triangulaire supérieure stricte.*

Ce problème, très long, mêle algèbre linéaire, réduction et algèbre euclidienne (afin d'éviter la dualité). Le niveau conceptuel de l'épreuve est élevé. La présence de nombreuses questions proches du cours a cependant permis une bonne évaluation des candidats.

Les résultats, théorèmes et techniques du programme ne sont pas toujours maîtrisés ; on ne saurait trop insister sur l'intérêt primordial qu'il y a à travailler le cours.

Les correcteurs ont été surpris par le manque de rigueur, ce qui est particulièrement flagrant en algèbre, ainsi que de soin dans la présentation. Les démonstrations, qualifiées d'évidentes, sont laissées au lecteur ; il n'est pas explicitement fait référence aux questions utilisées ; les quantificateurs sont utilisés de façon inadéquate ; les résultats et points importants sont rarement soulignés ou encadrés ; les copies sont trop souvent sales et pleines de ratures.

Nous conseillons vivement aux futurs candidats de tenir compte de ces diverses remarques.