d’utiliser la question précédente, ce qui est voué à l’échec dans la mesure où Q2 ne donne qu’un renseignement asymptotique.
Q4. La première partie de la question a été en général résolue. La seconde partie n’a pas été traitée dans la grande majorité des copies ; il suffisait de voir que v et les $v - 2e_i$ sont dans $\Omega_{1,n}$, mais la notion de sous-espace engendré semble souvent mal comprise.
Q5.6.7. Ces questions ont souvent été traitées de manière combinatoire, de manière plus ou moins convaincante selon les copies. Peu de candidats ont noté que Q5 se faisait immédiatement avec les propriétés de l’espérance. La variance était donnée dans Q6, ce qui a conduit à un certain nombre de tentatives d’escroquerie. Dans Q7, certaines copies trouvent des probabilités strictement su- périeures à 1 : on conseille aux candidats de prendre un peu de recul !
Q8. La rédaction de cette question est souvent approximative et ne fait pas nettement apparaître les arguments probabilistes sous-jacents : indépendance, incompatibilité, monotonie et sous-additivité de P. Par ailleurs, beaucoup de candidats calculent $P(L_1 = L_2)$ et $P(L_1 = -L_2)$ sans répondre vraiment à la question.
Q9. Dans la première partie de la question, les deux sens sont rarement traités. On note un certain flou quant à la notion de famille liée, ainsi que des erreurs de logique. Pour la deuxième partie de la question, on relève à nouveau, dans nombre de copies, une maîtrise insuffisante du formalisme des probabilités ; dans un certain nombre de copies, le lien entre la nullité du déterminant et le caractère lié de la famille des lignes n’apparaît pas.
Q10. Cette question a donné lieu à beaucoup de réponses dénuées de sens ; ce sont ici des difficultés de logique qui sont en cause (le quantificateur existentiel précède l’équivalence)
Q11. Le lien entre cette question et la question 10 a rarement été perçu ; la question a reçu très peu de bonnes réponses.
Q12. Question rarement traitée.
Q13. Cette question n’a pratiquement jamais été bien traitée ; elle est à vrai dire assez difficile à résoudre lors d’une épreuve en temps limité avec le programme de la filière PC.
Q14. Cette question a souvent été traitée. Cependant, la rédaction de la première partie est souvent filandreuse. Il suffit de dire nettement qu’une partie E d’un ensemble fini F ayant même cardinal que F ne peut être que F.
Q15. Cette petite question de dénombrement, ouverte, s’est révélée sélective. À noter qu’un certain nombre de candidats donnent la réponse correcte sans aucune explication, ce qui ne peut valoir tous les points.
Q16. Question souvent abordée, traitée dans un certain nombre de copies ; la rédaction n’est pas toujours claire et beaucoup de candidats semble confondre « incomparables » et « disjoints ».
Q17. Cette question combinatoire difficile n’a été bien traitée que dans les meilleures copies.
Q18. Q19 Ces questions simples ont permis à la plupart des candidats qui les ont abordées de récupérer quelques points.
Q21. Cette question facile nécessitait une maîtrise correcte de la logique et de la syntaxe ensembliste. Assez souvent abordée, elle a connu des fortunes très diverses.
Les questions suivantes ne concernent qu’une faible fraction des candidats.

1.2.4. Mathématiques II — PC

Le sujet de la deuxième épreuve de mathématiques PC était consacré aux propriétés classiques des fonctions harmoniques définies sur un ouvert de R^2 et à valeurs réelles ou complexes. De facture certes classique, ce problème était tout à fait dans l’esprit du programme PC, et conçu pour aborder un très grand nombre de chapitres du programme d’analyse.

La première partie était consacrée au noyau de Dirichlet et au lemme de Riemann-Lebesgue. Elle avait pour objectif de tester l'aisance des candidats dans les calculs faisant intervenir des nombres complexes (questions 1 et 2) ou des sommes géométriques (question 2), ainsi que leur capacité à contrôler des intégrales dépendant d'un paramètre tendant vers l'infini (questions 3 et 6).

- Trop de candidats semblent peu familiers avec le maniement des exponentielles complexes, et reviennent systématiquement aux fonctions sinus et cosinus, moins agréables à bien des égards !
- Le jury conseille aux candidats à venir de s'exercer à calculer rapidement et correctement toute somme géométrique de la forme $\sum_{k=m}^{n} z^k$, m et n étant des entiers éventuellement négatifs.
- Dans les questions 1 et 4, il était nécessaire de permuter une intégrale et une somme. Cette somme étant finie, la permutation était justifiée par simple linéarité de l'intégrale. De nombreux candidats ont perdu beaucoup de temps, faute de lucidité, à vérifier les hypothèses de théorèmes d'intégration terme à terme ici parfaitement inutiles.
- Dans la question 3, la plupart des candidats a pensé à intégrer par parties. Mais ensuite, beaucoup d'entre eux n'ont pas su justifier proprement le fait que
$$\frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} h'(u)\cos(\alpha u)du \to 0$$
quand $\alpha \to +\infty$, ce qui pouvait se faire très simplement grâce à l'inégalité triangulaire, et un peu moins simplement grâce au théorème de convergence dominée.
- Dans la question 4, la plupart des candidats a songé au changement de variable $u = t - x$, mais en oubliant trop souvent de changer les bornes :
$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{ devenait } \int_{t-\pi}^{t+\pi}, \text{ le retour à } \int_{-\pi}^{\pi}$$
utilisant la 2π-périodicité de l'intégrande.
- Dans la question 5, il fallait prendre garde au fait que la fonction h_t devait être indépendante de n. Le résultat de la question 1 se révélait ici capital.
- Dans la question 6, comme à la question 3, trop peu de candidats ont su contrôler proprement, par inégalité triangulaire, l'intégrale
$$\int_{-\pi}^{\pi} g''(x)e^{-inx}dx$$
une fois la double intégration par parties effectuée. Par ailleurs, beaucoup de candidats ont perdu un temps précieux à refaire pour
- $n \to -\infty$ un raisonnement absolument identique à celui qu'ils venaient de faire pour $n \to +\infty$.
- Dans la question 7 enfin, il fallait penser à justifier la convergence des séries $\sum_{n\geq 0} c_n(g)e^{int}$ et $\sum_{n\geq 0} c_n(g)e^{-int}$, c'était une conséquence directe de la question précédente.

La deuxième partie était consacrée au calcul du laplacien en coordonnées polaires (question 8), utilisé ensuite pour obtenir la « propriété de la moyenne » des fonctions harmoniques sur un ouvert de R^2 (question 10).

- Dans la question 8, le calcul des dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction *g* est en général mené à bien en utilisant la « règle de la chaîne », les choses se gâtant souvent pour les dérivées d'ordre 2, faute de notations claires et efficaces. Le jury a par exemple été surpris de voir apparaître des notations folkloriques comme :
$$\frac{\partial f}{\partial(x_0+r\cos t)}$$
Par ailleurs, pour aboutir au résultat, il fallait utiliser l'harmonicité de *f*, ce point devant apparaître très clairement dans le calcul.
- La question 9 reposait sur l'identité :

$$r^2J''(r)+rJ'(r)=-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)dt \text{ pour } r\in[0,\delta[.$$

Pour l'obtenir, il fallait calculer les deux premières dérivées de la fonction J en appliquant le théorème de dérivation sous le signe intégral. Dans ce théorème, l'hypothèse capitale est celle de domination, trop souvent purement et simplement oubliée. Parmi les candidats qui tentent de la justifier, beaucoup songent à juste titre à dominer

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)$$

par une constante, sans prêter attention au fait que la fonction $\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}$, certes continue sur $[0, \delta[\times[-\pi, \pi]$ n'a pas de raison d'être bornée puisque $[0, \delta[\times[-\pi, \pi]$ n'est pas fermé et borné.

Une fois l'égalité (1) obtenue, il fallait montrer la nullité du membre de droite, ce que de nombreux candidats (pourtant physiciens) ont pensé faire en déclarant que « toute fonction périodique a une moyenne nulle ». Il est parfois utile de ne pas trop cloisonner les disciplines ! Pour répondre complètement à la question, il restait à expliquer pourquoi $rJ''(r) + J'(r)$ était nul également en $r = 0$, ce qui résultait immédiatement de la régularité C^2 de J sur $[0, \delta[$ (fermé en 0) : presque aucun candidat ne l'a fait.

– La question 10 consistait essentiellement à résoudre sur $]0, \delta[$ l'équation différentielle (du premier ordre en y') $ry''(r)+y'(r) = 0$, puis à utiliser la continuité de J' en 0. Les correcteurs ont été très supris de voir de nombreux candidats utiliser une équation caractéristique, alors que l'équation différentielle ici considérée n'est pas à coefficients constants.

La troisième partie proposait de résoudre, sur un exemple, le problème de Dirichlet sur un carré.

– La question 11, délicate, reposait sur le fait qu'une fonction réelle continue sur un segment, positive et d'intégrale nulle est identiquement nulle. Elle a très rarement été résolue correctement.
– La question 12 en découlait presque immédiatement, le dessin d'un cercle centré en un point du carré où *f* atteint son maximum et tangent au côté le plus proche étant (presque) suffisant pour emporter l'adhésion. Elle a également été très rarement résolue.
– La question 13 était très accessible à condition de mener une analyse rigoureuse et attentive. À défaut, les formules parachutées se sont montrées le plus souvent fausses.

La quatrième partie proposait une démonstration du théorème de Liouville (toute fonction harmonique bornée sur R^2 est constante), en utilisant un développement en série trigonométrique.

– Dans la question 14, il fallait expliciter (sans justifier à nouveau la possibilité de dériver sous le signe intégral) les deux premières dérivées de v_n, puis obtenir l'égalité

$$r^2v_n''(r)+rv_n'(r)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t)e^{-int}dt \text{ pour } r\in[0,R[.$$

– Pour conclure, il fallait effectuer dans l'intégrale du membre de droite une double intégration par parties. Les correcteurs ont ici déploré de trop nombreux « passages en force », le manque d'honnêteté intellectuelle étant inévitablement et impitoyablement sanctionné.

— La question 15 a été très rarement menée à bien,de nombreux candidats s'embourbant à nouveau dans l'utilisation d'équations caractéristiques pour des équations à coefficients non constants. Peu d'entre eux ont saisi qu'il s'agissait de changer de fonction inconnue.

— Les questions 16, et plus encore 18, ont été très rarement traitées. En revanche, beaucoup de candidats ont vu que la question 17 était une conséquence immédiate de la question 7.

La dernière partie proposait une application du théorème de Liouville à la démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss. Seules les questions 19 et 20 ont été significativement abordées.

Nous terminerons ce rapport par quelques conseils aux candidats à venir.

Faire preuve de lucidité, ce qui peut signifier :

- saisir l'organisation et la logique du texte, afin d'utiliser judicieusement les résultats des questions précédentes ;
- utiliser des arguments proportionnés : pas besoin de théorème puissant pour intégrer terme à terme une somme finie !
- vérifier soigneusement les hypothèses des théorèmes du cours : la méthode de l'équation caractéristique ne fonctionne que lorsque les coefficients sont constants !

Viser une rédaction efficace : une à deux pages pour justifier la classe C^2 de la fonction *g* de la question 8, c'est bien trop !

Ne pas négliger, dans la préparation des concours, l'entraînement aux calculs.

Faire preuve d'honnêteté : il est assez difficile d'escroquer le jury, qui se montre sans pitié en présence de ce genre de tentative.

1.2.5. Mathématiques I — PSI

Une matrice $n \times n$ a tous ses coefficients égaux à ± 1 et l'on décide de leur signe en tirant à pile ou face de façon indépendante : le but du problème était de montrer que la matrice ainsi obtenue est inversible avec une probabilité qui tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini (Théorème de Komlos, 1967).

Le problème était divisé en 6 parties et 27 questions. Les quatre premières parties (20 questions) permettaient de tester les candidats sur de nombreux points du programme. Les deux dernières étaient de caractère plus technique et ont été abordées par une minorité. Disons-le tout de suite : le classement des candidats s'est fait sur les questions élémentaires des 4 premières parties, les deux dernières permettant de départager les meilleurs. Nous ne saurions trop insister sur le fait qu'il est impératif, pour bien réussir le problème, de traiter, de façon claire et précise, les questions élémentaires du début.

Partie A :
La première question est un parfait exemple : la façon la plus simple de la traiter était de constater que :