1.2 E - MATHEMATIQUES II - filière PC

I) REMARQUES GENERALES

Le problème de cette année est un classique de la théorie des séries de Fourier : la résolution de l'équation de la chaleur. Il s'agit de trouver les fonctions $u : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ satisfaisant $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t}$ avec des conditions au bord de U.

Le sujet était à la fois classique et abordable ce qui a donné une grande variation de notes et des copies assez différentes les unes des autres.

Le problème se composait de 4 parties : la première partie avec des questions de cours (décrire les solutions d'une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre 2), une deuxième plus calculatoire, une troisième assez classique mélangeant théorie et applications de la convergence normale puis une quatrième plus originale.

Nous essayons de reprendre les principales erreurs constatées, non pas par... sadisme, mais afin de permettre aux futurs candidats d'éviter les mêmes pièges. Bien entendu, la liste n'est pas exhaustive mais indicative.

II) REMARQUES PARTICULIERES

1) Première partie

1. A la question 1, il s'agissait montrer qu'une fonction réelle u de classe C^2 satisfaisant $v'' = \lambda v$ est nécessairement de classe C^∞. L'argument est pourtant simple : v'' étant un multiple de v elle est aussi C^2, ce qui implique que $v^{(4)} = \lambda^2 v$ etc. Le cas $\lambda = 0$ est trivial. Mais il faut d'abord justifier que l'on peut dériver AVANT d'y procéder. Un très grand nombre de candidats ont commencer à dériver sans se soucier de la justification pour accéder à la formule $v^{(2p)} = \lambda^p v$ puis en déduire que v est de classe C^∞.

2. Dans la même question, la conclusion $\lambda \geq 0$ passait nécessairement par le constat que $v \neq 0$ implique $\int_0^\pi v^2(x)\mathrm{d}x > 0$ (inégalité stricte). Très peu de candidats ont fait le raisonnement.

3. A la question 2, le cas $\lambda = 0$ doit être considéré à part, la formule donnant v n'étant pas la même. Encore une fois, très peu de candidats ont fait la distinction.

A la fin de la première partie les correcteurs avaient une idée assez claire de la copie qu'ils avaient devant eux. Il s'agissait d'une partie relevant du cours des équations différentielles linéaires d'ordre 2. Ce n'est qu'à de rares exceptions qu'un candidat n'a pas réussi cette partie pour se rattraper par la suite.

2) Deuxième Partie

1. A la question 6, il faillait utiliser la règle de Chasles pour découper l'intégrale afin de procéder aux intégration par parties nécessaires. Démarche assez peu fréquente dans les copies, la plupart de candidats ne se préoccupaient pas des discontinuités...
2. Autre surprise : dans la question 4 et 5 nous avons constaté que le simple fait de tracer le graphe d'une fonction affine (ou constante) par morceaux était source de difficultés. Des points faciles à récupérer ont été abandonnés ici.
3. La question 7 suggérait le résultat attendu. Du coup tout le monde y est parvenu, modulo quelques entorses à la règle... La valeur de $\sin(n\pi/2)$ est devenue une variable d'ajustement, y compris dans une même copie.
4. A la question 8 on peut montrer que la série converge normalement en utilisant le théorème de Dirichlet ou via une majoration de $|b_n(\phi)|$ par $\dfrac{1}{n^2}$. Une erreur très (trop) fréquente : $|b_n(\phi)| \leq \sin(n\pi/2)\dfrac{1}{n^2}$, sans valeur absolue entourant le sinus, cf questions 10, 12 aussi.

3) Troisième Partie

Cette partie mélangeait questions théoriques et applications sur la convergence normale de séries de fonctions.

1. La question 9 demandait de justifier que u_n était de classe C^∞. Les réponses étaient souvent surréalistes (du "charabia" selon les termes d'un correcteur).
2. Dans les questions 10-12 le mot d'ordre devait être "attention aux majorations hasardeuses". Des quantités positives majorées par des quantités négatives cela peut prêter à sourire, mais aussi à une perte de points.
3. La question 11, où il fallait montrer que le terme général d'une série ne tendait pas vers 0, a aussi été malmenée. Nous rappelons que $\sin^2(n\pi/2)$ ne vaut pas 1 et ne tend pas vers 0 non plus.
4. Vu souvent aux questions 11 et 13 : majorer le terme d'une série par celui d'une série divergente ne force pas la première à diverger aussi... c'est dans l'autre sens que ça marche mieux!
5. A la question 12 le passage de la dérivabilité de la série de fonctions sur $[\delta,\infty]$ à $]0,\infty[$ a aussi été très mal expliqué. Pourtant il suffisait d'écrire que la dérivabilité est une notion locale.

4 Quatrième Partie

1. La question 15 (très basique) a très rarement été faite, à notre grande surprise.
2. La question 17, astucieuse, a intrigué pas mal de candidats avec des résultats parfois étonnants.
3. Les questions 18, 19, 20 ont été très peu traitées

III CONSEILS AUX CANDIDATS

Il est possible d'améliorer sensiblement sa performance en prêtant attention à quelques "détails" :

- soigner sa rédaction : il faut trouver le juste équilibre entre répondre au plus grand nombre de questions possible et répondre sans ambiguïtés. En effet, une réponse juste mais mal justifiée ne peut être accréditée de tous les points. Les réponses doivent donc être succinctes mais complètes, cela fait partie de l'épreuve.
- écrire proprement : des petits caractères avec un stylo plume épais sont illisibles et la pénalité peut être très importante.
- Ne pas "tricher" : si la justification que vous proposez vous paraît erronée ou insuffisante ne la donnez pas. Le correcteur estimerait que vous ne maîtrisez pas les outils ou que vos connaissances sont superficielles.
- Mettre sa copie en valeur : vos copies sont examinées par des humains... les copies illisibles et celles sur lesquelles le correcteur passe plus de temps à chercher les réponses qu'à vérifier leur justesse seront mal notées, c'est mathématique!
- Prendre le temps de lire le sujet en entier avant de rédiger : ceci permet de mieux comprendre les objets traités.

IV Conclusion

Une partie assez calculatoire (la deuxième), deux parties où la bonne connaissance du cours était de mise et une quatrième partie originale, ont permis de contrôler à la fois la capacité de réflexion et la rigueur mathématique. Si les notes partielles variaient souvent beaucoup dans une même copie, la dispersion entre copies était très importante aussi.

Globalement, les connaissances de la première année restent mal assimilées et des outils fondamentaux oubliés (c'est une remarque souvent répétée).

Les élèves maitrisant le cours ont pu s'en sortir honorablement. Les plus astucieux ont accumulé des points à la dernière partie. Le sujet nous a paru assez équilibré et progressif.