

1.2 E - MATHEMATIQUES II - filière PC

I) REMARQUES GENERALES

Le problème proposait une démonstration de l'inégalité de Pólya-Szegö. À cette occasion, dans les préliminaires, on établissait des propriétés d'algèbre linéaire utiles pour établir l'inégalité de Kantorovitch. Celle-ci permettait d'aboutir au résultat dans la troisième partie.

Le problème couvrait une grande partie du programme d'algèbre linéaire et ne présentait aucune difficulté sur le plan théorique.

Il exigeait toutefois une bonne maîtrise des techniques de calcul, usuelles. Il a été traité dans sa quasi totalité dans quelques très bonnes copies et a permis de bien classer l'ensemble des candidats.

Cependant nous voulons relever des erreurs de cohérence qu'il faudra signaler aux futurs candidats. Nous avons, par exemple, rencontré dans certaines copies :

- la somme d'une matrice et d'un vecteur,
- la somme d'une matrice et d'un nombre,
- la racine carrée d'un vecteur,
- les vecteurs positifs,
- l'égalité d'une matrice et d'un nombre,
- le raisonnement par équivalence qui ne traite que l'une des implications.

II) REMARQUES PARTICULIERES

II.1) Préliminaires

- 1) Un seul des sens de l'équivalence est traité dans bon nombre de copies.
- 2) Il en est de même dans cette question.
- 3) Bon nombre de candidats trouvent la matrice C mais oublient de montrer que la matrice proposée est symétrique.
- 4) Cette question a été particulièrement discriminante. Seules les bonnes copies démontrent l'inclusion : $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \subset \text{Ker}(C - \sqrt{\lambda} I_n)$.
- 5) Cette question reprenait simplement la question précédente et a souvent été bien traitée.
- 6) Il en est de même pour cette question.
- 7) Là encore il s'agit d'une conséquence directe de ce qui précède.
- 8) Cette question était formulée de manière ambiguë, la matrice B étant seulement symétrique positive. L'existence d'une unique matrice $B^{\frac{1}{2}}$ n'étant plus assurée on ne pouvait conclure à la commutativité, toutefois certains candidats ont supposé que B était bien définie positive et ont démontré la commutativité dans ce dernier cas, résultat dont on se servait en fin de problème, les deux interprétations ont bien sûr été prises en compte.

II.2) Inégalité de Kantorovitch

- 9) Cette question a été discriminante.
- 10) Les candidats qui utilisent le cas où il y a égalité pour Cauchy-Schwarz oublient le plus souvent de montrer que le coefficient de proportionnalité est indépendant de X et de dire qu'il s'agit des homothéties positives.

11) Dans cette question souvent abordée, on trouve les $F(\lambda)$ valeurs propres de $F(A)$ mais on oublie souvent de montrer que ce sont les seules.

12) Le signe du trinôme est traité convenablement dans beaucoup de copies.

13) Beaucoup de candidats traitent la positivité de N de manière insuffisante.

14) Il est surprenant que $f(0)$ et $f(1)$ ne soient pas trouvés dans toutes les copies.

15) Quand elle est abordée cette question est bien traitée.

16) Cette question était sans doute la plus délicate dans la mesure où elle a rarement été abordée avec succès.

17) Cette question supposait que l'on se rende compte que $\lambda_1 < \lambda_n$, ce qui permettait de justifier l'orthogonalité des vecteurs X_1 et X_n .

18) L'optimalité de l'inégalité est souvent vue quand cette question est abordée.

II.3) Inégalité de Pólya-Szegö

19) Cette question est souvent bien traitée quand le candidat trouve les minorants et les majorants des valeurs propres de D et D^{-1}

20) Cette question est souvent bien traitée même si elle se trouve à la fin.

21) Cette question est, elle aussi, souvent bien traitée.

22) Quelques copies traitent cette question dont la seule difficulté est, là encore, de se trouver en fin de problème.

III) CONCLUSION

Les calculs doivent être explicités du début jusqu'à la fin avec toute la clarté nécessaire, une bonne organisation des calculs est un plus indiscutables. Enfin les raccourcis abusifs sont toujours sanctionnés.

Il est recommandé aux candidats de s'entraîner à calculer. La maîtrise dans ce domaine ne s'acquiert qu'avec une pratique régulière. Elle est d'autant plus indispensable que les candidats se trouvent dans une filière expérimentale. D'autre part rappelons que les théorèmes utilisés doivent être énoncés avec précision, et leurs hypothèses vérifiées. Enfin une orthographe correcte et une présentation soignée ne peuvent que mettre les correcteurs dans de bonnes dispositions vis à vis de la copie correspondante.

Après cette critique systématique il est bon de rappeler qu'un rapport de concours a pour finalité de souligner les insuffisances en vue de permettre aux futurs candidats d'éviter un certain nombre d'écueils et d'aborder leur préparation au concours dans les meilleures conditions. Qu'il nous soit permis de dire qu'un bon nombre de copies sont plus que satisfaisantes.