MATHEMATIQUES II - filière PC

I) REMARQUES GENERALES

Le problème de cette année couvrait un large spectre de connaissances allant de formules algébriques comme le binôme de Newton aux outils d'analyse comme le théorème de convergence dominée de Lebesgue, en passant par les intégrales généralisées et les séries entières. Chaque correcteur a traité plus de 700 copies et leurs notes moyennes étaient assez faibles.

Comme l'année dernière, le nombre de très mauvaises copies n'a pas sensiblement évolué et le nombre de très bonnes copies a encore diminué. En revanche, nous ne pouvons que regretter l'écart qui se creuse entre les meilleurs des candidats et la grande majorité.

Si certaines notions semblent être assimilées par les élèves, d'autres, comme l'intervalle de convergence d'une série entière est toujours couvert de mystère, même pour ceux d'entre eux qui ont globalement un niveau proche de la moyenne. Il est décevant de constater que des outils fondamentaux de la première année (encore une fois ~ et o) perdent toute leur efficacité - pour ainsi dire - aux mains des candidats.

Nous essayons de reprendre les principales erreurs constatées, non pas par plaisir, mais afin de permettre aux futurs candidats d'éviter les mêmes erreurs. Bien entendu la liste n'est pas exhaustive mais indicative.

II) REMARQUES PARTICULIERES

II.1) Première Partie

1. La notation $n!$ n'a un sens que si n est entier. Sinon, il faut la définir. En particulier, $a!$ et $a(a-1) \dots (a-p)$ ce n'est pas du tout la même chose (même si on a définit $a!$).

2. Les intégrales de Riemann sont des intégrales (généralisées) des fonctions x^a, positives sur $]0,1[$ ou sur $]1,+\infty[$. Toute autre utilisation non justifiée est erronée.

3. S'il est connu que la fonction $x \to x^a$ est d'intégrale généralisée convergente si $a>-1$, il est tout aussi bien connu que pour $a \leq -1$ cette affirmation est fausse. Inutile d'essayer de nous faire croire le contraire.

4. La détermination du degré du polynôme P_n devait être un jeu d'enfant. Cependant, nombreux étaient ceux qui n'ont pas réussi à donner le nombre n comme réponse.

5. Plusieurs candidats, afin de retrouver la formule demandée à la question (5), manipulaient les égalités de manière peu orthodoxe. Il est préférable, quand on n'y arrive pas, de s'arrêter.

A la fin de la première partie les correcteurs avaient une idée assez claire de la copie qu'ils avaient devant eux.

Or, cette partie étant assez calculatrice, nombre de copies nous ont agréablement ou désagréablement surpris par la suite. Plusieurs candidats se sont effondrés à la fin de celle-ci et d'autres se sont rachetés par la suite.

II.2) Deuxième Partie

1. Une fonction continue sur un intervalle compact est toujours intégrable ; il n'est pas nécessaire d'évoquer Riemann.

2. Le produit de deux fonctions intégrables ne l'est pas nécessairement, la compacité de l'intervalle n'arrange rien.

3. Une erreur très fréquente (avec des variantes) : $(1-x)^{1/2} \sim x$ et donc $1/(1-x)^{1/2}$ est intégrable sur $[0,1]$!

4. La question 10 nécessite l'utilisation du théorème de la convergence monotone combiné avec un argument de parité.

Le théorème de convergence dominée n'est pas une panacée. En particulier, il faut d'abord prouver que l'intégrale de la somme $\sum_{k=0}^{\infty} a^p \; x^p /(1-x)^{1/2}$ est égale à la somme des intégrales pour ensuite pouvoir éliminer les intégrales des termes impairs.

5. Une série entière n'est pas nécessairement intégrable sur son intervalle de convergence.

II.3) <u>Troisième Partie</u>

Dans toute cette partie le mot d'ordre devait être "attention aux calculs". S'il n'y avait pas de grandes difficultés de raisonnement, toute erreur dans les calculs pouvait être très pénalisante. Voici quelques remarques.

1. Etablir qu'une fonction satisfait une équation différentielle est facile : il suffit de la dériver et voir ce qui se passe. Or, un très (trop) grand nombre de candidats n'ont pas su dériver la fonction g!! Dommage, car il y avait ici des points faciles à gagner.

2. En déduire de cette équation différentielle la série entière n'est pas difficile mais nécessite de l'attention. En effet les calculs sont délicats et l'erreur était fréquente.

3. Souvent on a vu dans toute cette partie : $(2^p)^2=2^{p+1}$...

4. Dans la question (17) la valeur à donner à x était $\sqrt{2}/2$ qui appartenait à l'intervalle de convergence. Plusieurs ont proposé des valeurs qui n'y appartenaient même pas.

II.4) <u>Quatrième Partie</u>

1. Le développement en série entière de $(1-t)^{-a}$ ne devrait pas poser tant de problèmes. Si on ne se souvient pas du terme général on peut le retrouver en utilisant la formule de Taylor.

2. Les fonctions usuelles développables en série entière n'ont pas nécessairement un rayon de convergence infini.

3. Encore une fois (question 21) le produit de fonctions intégrables ne l'est pas ni même si l'une est continue. Dans ce cas précis la compacité de l'intervalle permettait de majorer absolument la fonction F et d'utiliser le critère de comparaison.

4. Les questions (22) et (23) n'ont été que très exceptionnellement traitées.

III) <u>CONSEILS AUX CANDIDATS</u>

Il est possible d'améliorer sensiblement sa performance en prêtant attention à quelques "détails" :

• soigner sa rédaction : il faut trouver le juste équilibre entre répondre au plus grand nombre de questions possible et répondre sans ambiguïtés. En effet, une réponse juste mais mal justifiée ne peut être accréditée de tous les points. Les réponses doivent donc être succinctes mais complètes, cela fait partie de l'épreuve.

• écrire proprement : des petits caractères avec un stylo plume épais sont illisibles et les pénalités peuvent être très importantes.

• Ne pas "tricher" : si la justification que vous proposez vous paraît erronée ou insuffisante ne la donnez pas. Le correcteur estimerait que vous ne maîtrisez pas les outils ou que vos connaissances sont superficielles.

• Mettre sa copie en valeur : Vos copies sont examinées par des humains... les copies illisibles et celles sur lesquelles le correcteur passe plus de temps à chercher les réponses qu'à vérifier leur justesse seront mal notées, c'est mathématique !

Il est important d'avoir bien assimilé les notions de la première année. Les relations ~ et **o** sont utiles mais également source d'erreurs.

Encore et toujours source de fautes, le passage de l'intégrale derrière la limite (ou la somme) : il y a essentiellement deux façons de faire, le théorème de Lebesgue et la convergence monotone. C'est l'une ou l'autre qui marchera.

Enfin, une série entière reste quelque chose d'obscur. Elle se dérive, elle se primitive, pourquoi donc on ne pourrait pas l'intégrer ? Quelle est la différence entre rayon de convergence et intervalle de convergence ? Et quelles sont les méthodes pour préciser ceux-ci ? Des petites questions qui vous aideront à réviser.

IV) CONCLUSION

Avec deux parties assez calculatrices et deux où le raisonnement mathématique était de mise, on a eu l'occasion de contrôler à la fois la capacité de réflexion et la rigueur mathématique. Si les notes selon la section variaient souvent beaucoup dans une même copie la dispersion entre copies était très importante aussi.

Globalement, les connaissances de la première année restent mal assimilées et des outils fondamentaux oubliés. Le lien entre intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue n'est pratiquement jamais évoqué et les hypothèses des théorèmes utilisés sont bien cachées. Il serait peut être utile de demander aux étudiants de rappeler chaque théorème avant de l'utiliser, du moins pour les plus difficiles parmi eux.