1.2 D - MATHEMATIQUES II - filière MP

I) REMARQUES GENERALES

Le sujet de cette année consistait en la démonstration par Karamata d'un résultat obtenu auparavant par Hardy et Littlewood sur le comportement asymptotique de la somme partielle d'une série entière en fonction d'un équivalent simple de celle-ci au bord de son disque de convergence. Il faisait intervenir plusieurs branches de l'analyse : intégrales dépendant d'un paramètre, séries de fonctions, familles sommables, mais aussi un peu de raisonnement sur les entiers qui sont sommes de deux carrés et un peu d'algèbre linéaire.

Ce problème requérait plusieurs qualités de la part des candidats : une bonne connaissance de leur cours, la pratique des méthodes courantes de raisonnement et de calcul, mais aussi la compréhension des questions, la capacité à saisir le fil conducteur du problème et de l'esprit d'initiative pour résoudre les questions dont la solution n'est pas évidente *a priori*.

Les notes obtenues par les candidats sont fonction de leurs compétences dans chacun de ces domaines, et aussi, bien sûr, de l'effort de réflexion et de rigueur qu'ils ont fourni durant les quatre heures de l'épreuve. En effet, de nombreuses questions paraissaient fort simples voire élémentaires, mais leur rédaction requérait du soin de façon à fournir une argumentation complète des assertions proposées, comme nous allons le voir à présent.

Question 1. Les règles d'intégrabilité des fonctions en 0 et en $+\infty$ sont certes connues par la plupart des candidats, mais ils ne précisent pas tous qu'ils sont en droit de l'appliquer à la fonction ψ du fait qu'elle est continue et positive sur $]0, +\infty[$.

Question 2. Le sujet demandait de définir *précisément* les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie, ce qui n'a été fait correctement que par une minorité de candidats. Il ne suffisait donc pas de prouver que $F(x)$ existe pour tout $x > 0$, mais il fallait également prouver que $F(0)$ n'existe pas (la fonction intégrée n'étant alors pas intégrable près de 0) ni non plus $F(x)$ pour $x < 0$ (la fonction intégrée n'étant alors pas intégrable près de $-x$, ni même continue par morceaux sur $]0, +\infty[$, condition stipulée par le programme). En outre, il ne servait à rien d'utiliser ici le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre, la continuité de F n'étant pas demandée par le sujet.

Question 3. Il s'agissait ici d'appliquer le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre, dont la bonne connaissance était évidemment requise pour obtenir les points de cette question. Outre les conditions de régularité tant en x qu'en u et d'intégrabilité de la fonction intégrée et de sa dérivée, il fallait fournir une fonction de domination de la dérivée : or souvent, celles proposées par les candidats soit étaient non intégrables sur $]0, +\infty[$, soit dépendaient de x, soit ne dominaient pas la fonction intégrée pour tout $x > 0$. Il fallait en tout cas limiter les valeurs de x (et non de u !) à un segment, ou du moins à un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, pour obtenir une fonction de domination qui convienne. Il est regrettable de constater que moins de la moitié des candidats réussissent à traiter correctement cette question d'application directe du cours.

Question 4. Nous avons été surpris du très faible nombre de candidats qui ont ne serait-ce qu'abordé valablement cette question, et par le nombre important de ceux qui ont manipulé l'expression de départ pour aboutir au résultat demandé. Le calcul de $xF'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)F(x)$ par simple emploi de la linéarité ne donne évidemment pas $-K$: il était donc nécessaire d'effectuer une intégration par parties sur l'une des intégrales pour parvenir à ce résultat. La nécessité de préserver l'intégrabilité des fonctions interdisait de choisir comme fonction à primitiver autre chose que $\frac{1}{\sqrt{u}}$. Ce choix étant fait, le calcul permettait d'obtenir assez simplement le résultat.

Question 5. Il était inutile de recourir ici à la théorie de la résolution des équations différentielles, le travail étant déjà fait par la proposition par l'énoncé de la fonction G. Il suffisait de dériver celle-ci et d'utiliser le résultat du 4° pour obtenir $-\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$. Il suffisait alors de primitiver les deux fonctions, en n'omettant pas de préciser que l'intégrabilité et la continuité du second membre rendait licite le recours à une intégrale.

Question 6. La plupart des candidats n'ont pas compris les attentes de cette question. Il n'y avait pas grand-chose à faire pour établir que $G(x)$ tend vers C quand x tend vers 0 et vers $C - K^2$ quand x tend vers $+\infty$: c'est la valeur numérique de ces limites qu'il était nécessaire de calculer. Il a souvent été procédé à une interversion de l'intégrale et de la limite sans justification, ce qui donnait tout de même le bon résultat en $+\infty$, mais les candidats obtenaient 0 en 0 car ils considéraient faussement que F admet une limite finie en 0, sans égard pour le résultat de la question 2. Il en résultait alors $C = K = 0$, ce que certains candidats écrivaient sans vergogne, nonobstant le fait que l'intégrale d'une fonction continue et strictement positive ne saurait être nulle ! L'absence de ce genre de signal d'alerte, qui devrait alarmer les candidats sur la fausseté de leur raisonnement, est l'une des constatations les plus regrettables à l'issue de la correction. Pour la limite en $+\infty$, le recours au théorème de convergence dominée n'était guère utile étant donné qu'une simple majoration de la fonction intégrée suffisait. De surcroît, il ne fallait surtout pas localiser la majoration en limitant les valeurs de x à un segment de $]0, +\infty[$ pour ensuite faire tendre x vers 0 ou vers $+\infty$! Pour la limite en 0, il fallait de nouveau faire preuve d'initiative de façon à obtenir le comportement de $F(x)$, et effectuer le changement de variable $u = tx$, puis recourir au théorème de convergence dominée et à un nouveau changement de variable de façon à établir que $G(x)$ tend vers π quand x tend vers 0. C'est une qualité importante du scientifique ou de l'ingénieur que de savoir utiliser à bon escient les outils à sa disposition sans attendre qu'on lui dise de le faire, car c'est ainsi qu'il participe à l'innovation technique et à l'avancée de la science.

Question 7. Si l'existence de f et g a généralement été établie correctement, il n'en est pas de même de leur continuité : certains candidats pensent que les séries les définissant convergent normalement sur $]0, +\infty[$, d'autres omettent complètement l'hypothèse de convergence normale ; d'autres enfin oublient tout simplement de préciser que les fonctions sommées sont continues sur $]0, +\infty[$.

Question 8. C'était une question classique sur la comparaison série-intégrale. L'hypothèse de décroissance de la fonction φ_x définie par $\varphi_x(u) = \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$ (et non des fonctions f_n définies par $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$) permettait d'encadrer $\varphi_x(n)$ entre les intégrales de φ_x sur les segments $[n, n + 1]$ et $[n - 1, n]$; l'intégrabilité de φ_x permettait de faire la somme des séries des trois termes obtenus. Le changement de variable $t = ux$ permettait enfin d'obtenir l'équivalent $\frac{K}{\sqrt{x}}$. Trop de candidats s'en sont dispensés, donnant alors pour équivalent de $f(x)$ une fonction de u, voire une intégrale divergente en u, ceci en recourant à un théorème de convergence dominée alors que pour $x = 0$ il n'y a pas de convergence du tout !

Question 9. Un candidat moyen devrait au moins savoir résoudre simplement ce genre d'exercice standard que l'on rencontre couramment. Que ce soit par le théorème de comparaison série-intégrale, par l'emploi d'une série télescopique, par le caractère décroissant et minoré de la suite étudiée ou par l'étude de deux suites adjacentes, entre autres procédés possibles, la convergence de cette suite pouvait être établie facilement. Malheureusement, trop de candidats affirment que deux suites sont équivalentes si leur différence tend vers zéro, ou que si la différence de deux termes consécutifs d'une suite tend vers zéro alors cette suite est convergente, ou encore qu'une suite bornée est nécessairement convergente.

Question 10. La convergence de cette série pouvait être établie, soit à l'aide des questions 7 et 9, soit par une simple majoration du terme général par ne^{-nx}. Le calcul pouvait s'opérer de plusieurs manières : soit en calculant le produit des sommes partielles et en faisant tendre le nombre de termes vers l'infini, soit par produit de cette série par $1 - e^{-x}$, soit encore en recourant à un produit de Cauchy, à condition dans ce dernier cas de justifier le procédé par la positivité de tous les termes des séries concernées.

Question 11. Curieusement, bien peu de candidats ont été capables de donner un équivalent simple de $h(x)$ alors qu'il suffisait de dire que $1 - e^{-x}$ est équivalent à x en 0. Quant à ceux qui ont essayé de donner un équivalent de $g(x)$, ils ont souvent recouru à un théorème de convergence dominée, alors qu'il n'y avait pas convergence du terme général par rapport à x, mais équivalence de celui-ci à celui de la série définissant $2g(x)$ quand x tend vers 0. On ne pouvait pas non plus invoquer l'équivalence des sommes des séries de termes généraux équivalents, puisqu'il n'était pas question ici d'établir l'équivalence des sommes partielles de séries divergentes ni des restes de séries convergentes ! C'est là que *la convergence* de la suite des différences des termes généraux, et non *l'équivalence* de ceux-ci, avait tout son intérêt, car cette suite étant bornée par une constante M, on pouvait majorer la différence $|h(x) - 2g(x)|$ par $\frac{M}{1-e^{-x}}$ qui est équivalent à $\frac{M}{x}$ quand x tend vers 0, donc négligeable devant $h(x)$, ce qui permettait de conclure, ce que bien peu de candidats ont été capables de faire.

Question 12. La plupart des candidats ont déterminé correctement I_A dans le cas où A est fini. Dans le cas infini, l'existence de la suite (b_n) a trop souvent résulté d'une paraphrase de l'énoncé par les candidats. Certains ont cru bon de recourir au théorème de Bolzano-Weierstrass : un bien gros pavé pour écraser une si petite mouche, et il aurait au moins fallu se limiter à n assez grand pour que la suite extraite soit constante et non seulement constante à partir d'un certain rang ! D'autres ont simplement proposé de numéroter les éléments de A et de prendre pour b_k l'élément numéroté k, sans égard au caractère obligatoirement croissant des indices d'une suite extraite. Quant à la détermination de I_A , elle requérait de considérer séparément les cas $x = 0$ et $x > 0$; mais de nombreux candidats l'ont traitée en écrivant : $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n e^{-nx} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$, ce qui rendait évidemment impossible l'attribution de points pour cette partie de la question.

Question 13. Certains candidats ont fait remarquer pertinemment que l'hypothèse d'appartenance de A à S était ici superflue. La convergence de la série considérée résultait de la majoration $\mathrm{Card}(A(n)) \leq n + 1$ (et non n), et sa valeur du calcul d'un produit de Cauchy, ou autre méthode analogue à celles vues pour la question 10, en remarquant que $\mathrm{Card}(A(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Question 14. Il n'est guère utile de recourir à une récurrence pour déterminer le nombre d'entiers dont le carré est inférieur ou égal à n : un peu de logique et de rigueur suffit pour cela. De nombreux candidats ont ensuite obtenu l'encadrement : $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}\, e^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \leq \frac{1}{1-e^{-x}}$; la négligeabilité du dernier membre devant $g(x)$ devait leur permettre d'obtenir l'équivalent demandé, malheureusement de trop nombreux candidats ont multiplié les trois membres de l'inégalité par $1 - e^{-x}$ et ont invoqué le théorème des gendarmes, alors que le membre central était alors encadré entre 0 et 1, commettant donc de nouveau la même erreur que dans la question 9.

Question 15. C'était là typiquement la question dont la réflexion, la rigueur et le soin permettaient de venir à bout.
Premier point : trouver une majoration du nombre de couples d'entiers non nuls (p, q) tels que $n = p^2 + q^2$. Comme p et q sont compris entre 1 et n, on pouvait proposer n^2 (mais non $2n$) ; entre 1 et $\sqrt{n}$, on pouvait choisir $\left(\sqrt{n}\right)^2$, soit n ; mais comme q est entièrement déterminé par p, on pouvait retenir $\sqrt{n}$. Aucune importance en tout cas, puisque la convergence de la série s'ensuivait dans tous les cas.
Deuxième point : interpréter $v(n)$ à l'aide de A_1 . Peu de candidats ont su obtenir $v(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_{1,k} a_{1,n-k}$, et en déduire la relation demandée par produit de Cauchy de la série définissant f_{A_1} par elle-même.
Troisième point : comparer $a_{2,n}$ et $v(n)$. Il suffisait de dire : $a_{2,n}$ et $v(n)$ sont simultanément nuls, et si $a_{2,n}$ vaut 1 alors $v(n)$ est au moins égal à 1. Curieusement, de nombreux candidats ont affirmé que $\mathrm{Card}(A_2(n))$ est inférieur ou égal à $v(n)$, ce qui rendait le résultat demandé trivial : malheureusement, il n'y a *a priori* aucune relation entre $\mathrm{Card}(A_2(n))$ et $v(n)$, donc ce raisonnement est invalide.

Question 16. De nombreux candidats ont affirmé l'existence de $L(\psi)$ pour tout $\psi \in E$ par la majoration du terme général de la série sans valeur absolue, ou pis par la majoration des sommes partielles, pis encore par celle de la série tout entière, que l'on écrit de ce fait sans même savoir si elle converge ! Pis encore, certains ont majoré la norme uniforme du terme général de la série, incluant de ce fait l'exponentielle dans cette norme, de sorte que celui-ci ne pouvait être majoré que par $\alpha_n \|\psi\|_\infty$ qui n'est pas nécessairement le terme général d'une série convergente. La linéarité et le caractère croissant de L n'ont pas posé de problème en général.

Question 17. Le fait que E_1 est un sous-espace vectoriel de E et que Δ est linéaire résultaient à peu près des mêmes calculs, mais certains candidats ont oublié de conclure par ces deux assertions. Plusieurs ont attribué la continuité de Δ au fait que E_1 serait un espace vectoriel de dimension finie, ce qui est pourtant démenti par la question suivante.

Question 18. L'appartenance de e_p à E_1 ne saurait résulter d'un théorème de la double limite puisque la série définissant $L(\psi)$ n'a aucune raison de converger en 0. Ce ne peut être le cas que si ℓ est nul, ce qui n'est en général pas vrai, et implique que L est l'application nulle, ce qui en fait un cas sans intérêt. Un grand nombre de candidats affirment que la limite définissant $\Delta(\psi)$ existe du fait que la fonction concernée est bornée, ce qui est évidemment insuffisant. Certains ont réussi à calculer correctement $L(e_p)$, mais ils n'ont pas tous pensé à exprimer cette quantité en fonction de l'intégrale de e_p sur [0, 1], ce qui les handicapait fortement pour la suite de la question et pour la suivante. Il ne fallait pas manquer

ensuite d'en déduire que les polynômes appartiennent à E_1 par linéarité, puis d'énoncer le théorème de Weierstrass pour passer aux fonctions continues : ce que beaucoup de candidats parvenus à ce point ont pensé à faire, mais avec parfois des énoncés fantaisistes ou abrégés du style « *toute fonction est limite d'un polynôme* » ce qui ne fait penser que de très loin au théorème original ! Une autre erreur courante a été d'écrire la suite de polynômes (P_n) convergeant vers une fonction continue ψ sous la forme $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, ce qui faisait de ψ une fonction développable en série entière, ce qui est évidemment loin d'être toujours le cas.
L'appartenance de toute fonction continue ψ à E_1 était assurément la partie la plus délicate de la question. Une bonne partie des candidats qui l'ont traitée ont présupposé ce fait et introduit $\Delta(\psi)$ sans savoir si ce nombre existait. Il était nécessaire soit de recourir à un théorème de la double limite, soit d'introduire une majoration avec trois ε ; mais un prérequis à cela était d'établir que la fonction F qui à x associe $xL(e_0)(x)$ est prolongeable par continuité en 0, et est de ce fait définie et continue sur [0, 1] donc bornée, ce qui permet d'affirmer la convergence uniforme de la suite des fonctions $F_k(x) = xL(P_k)(x)$ vers F, ou ce qui revient au même, de majorer leur différence par ε indépendant de $x \in [0, 1]$. Enfin, la valeur de $\Delta(\psi)$ allait de soi quand on avait pensé à exprimer celle de e_p par son intégrale sur [0, 1].

Question 19. De nombreux candidats ont établi la continuité des fonctions g_+ et g_- , et s'en sont tenus là. Ceux qui disposaient de la valeur de $\Delta(\psi)$ sous forme de son intégrale pour tout $\psi \in E_0$ n'avaient aucune difficulté à calculer $\Delta(g_+)$ et $\Delta(g_-)$; mais celui de $\Delta(1_{[0,\,a]})$ a souvent été fort mal mené. Il était pourtant naturel de se poser la question suivante : pour quelle raison l'auteur du sujet fait-il démontrer la croissance de L, résultat trivial dont la preuve est quasiment sans intérêt ? Quand on voit passer ce genre de question, il est bon de la garder en mémoire en se disant qu'elle va sûrement servir quelque part. En l'occurrence, c'était là que la croissance de L était utile, car elle permettait d'encadrer $\Delta(1_{[0,\,a]})$ par $\Delta(g_+)$ et $\Delta(g_-)$, et en manipulant correctement ε et x, on obtenait $\Delta(1_{[0,\,a]}) = a$ qui est encore l'intégrale de $1_{[0,\,a]}$ sur [0, 1].
Pour terminer, on déduisait par linéarité du résultat précédent que toutes les fonctions en escalier appartiennent à E_1 , en précisant tout de même que deux fonctions qui diffèrent seulement en un nombre fini de points appartiennent à E_1 ; puis on pouvait utiliser le fait que toute fonction continue par morceaux est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier, ou – ce qui était suffisant – on pouvait encadrer une fonction h continue par morceaux par deux fonctions en escalier dont la différence des intégrales sur [0, 1] est inférieure à ε, et on pouvait alors procéder comme précédemment pour en déduire que h appartient à E_1 et que $\Delta(h)$ est égale à l'intégrale de h sur [0, 1]. Mais on est là à un point qui n'a été atteint que par un tout petit nombre de candidats.

Question 20. Facile même sans avoir fait grand-chose de ce qui précède, cette question a tout de même donné lieu à plusieurs erreurs sur la valeur de $(L(\psi))\left(\frac{1}{N}\right)$ puis sur celle de sa limite quand N tend vers $+\infty$.

Question 21. Facile également, cette question a été rarement traitée car elle requérait d'avoir traité et compris plusieurs des questions précédentes, en particulier la question 15.

Conclusion. Le bilan de la correction de ce sujet est plutôt décevant : une faible proportion de candidats ont obtenu plus de la moitié des points sur le total brut, et pour beaucoup le sujet s'est limité aux questions 1, 2, 3, 7, 8, 12, 16, 17. Un grand nombre de copies nous ont paru ne pas répondre au minimum requis pour cette épreuve : orthographe et syntaxe déficientes, abus des abréviations, écriture difficilement lisible, questions non numérotées, sans parler des questions dont la rédaction est abandonnée en cours de route et des nombreuses ratures. Elles donnent un sentiment de désinvolture, voire de démission, de la part de leurs auteurs. Nous avons également constaté trop fréquemment une connaissance insuffisante du cours, l'incapacité de le mettre en pratique dans des situations simples, et le recours à des raisonnements manifestement faux pour aboutir au résultat voulu, ce qui manifeste clairement la malhonnêteté intellectuelle de leurs auteurs. Autant dire qu'un étudiant sérieux et travailleur, qui apprend son cours et s'entraîne aux méthodes et exercices classiques de celui-ci, a déjà de sérieux atouts. S'il prend le temps de réfléchir sur le sens des problèmes et d'en chercher le fil du raisonnement, s'il s'efforce de recourir aux outils dont il dispose pour attaquer des questions à première vue insolubles, il a de grandes chances d'obtenir une note qui le propulse vers les niveaux de l'admissibilité. Plus encore, par cette attitude orthogonale à un bachotage stérile, il se prépare ainsi au mieux à son futur métier d'ingénieur ou de chercheur par la recherche de solutions à des problèmes nouveaux qui ne manqueront pas de se poser à lui, tant il est vrai que la science et la technologie ne progressent qu'en sortant des sentiers battus.