1.2 D - MATHEMATIQUES II - filière MP

I) REMARQUES GENERALES

La réforme des programmes de Mathématiques Spéciales mise en œuvre il y a deux ans comportait une nouveauté majeure, à savoir l'introduction des Probabilités. Celles-ci se limitent à une étude élémentaire des probabilités et variables aléatoires discrètes, mais elles ouvrent un champ nouveau aux sujets de concours, qui a été exploré avec l'épreuve de Mathématiques II MP du Concours Commun Mines Ponts.

En effet, le problème de cette année proposait l'étude de la norme d'une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables aléatoires sous-gaussiennes. Il abordait tout aussi bien l'algèbre linéaire, l'analyse et un peu de topologie élémentaire que les probabilités et les variables aléatoires.

La correction des copies nous a permis de constater que ce sujet était de longueur et de difficulté adaptées au niveau moyen des candidats, et qu'il a permis un bon étalement des notes. Les questions de probabilités ont été traitées tout aussi valablement que celles portant sur d'autres parties du programme, ce qui montre que cette partie du programme a été aussi bien intégrée que les autres par les candidats. Notons cependant que les justifications des calculs et des raisonnements sont encore nettement perfectibles, comme nous le verrons dans les remarques par question.

Question 1. Les trois propriétés requises pour la compacité de S^{n-1} (fermé, borné, en dimension finie) n'étaient pas toujours mentionnées ou établies. L'existence du maximum de $\| Mx \|$ quand x décrit S^{n-1} a donné lieu à de nombreuses erreurs ou omissions dans les raisonnements. Tout d'abord, il était nécessaire d'invoquer la continuité de l'application qui à x associe $\| Mx \|$, en tant que composée de deux applications continues, puis de faire appel à la compacité de S^{n-1} pour en déduire qu'elle est bornée et atteint ses bornes sur cet ensemble. Notons que cela n'a guère de sens de parler du maximum d'une fonction vectorielle (donc non numérique) sur un compact.

Question 2. Les quatre propriétés d'une norme n'ont pas toujours été toutes établies voire même seulement mentionnées. La positivité était souvent oubliée ; quant au caractère défini, sa démonstration résultait souvent davantage de la force de conviction du candidat que d'un véritable raisonnement. La démonstration de l'inégalité demandée dans la suite de la question n'était pas toujours opérationnelle dans le cas $x = y$.

Question 3. Le cas où M est diagonal a souvent été traité correctement. Par contre, le cas général d'une matrice symétrique réelle a souffert de plusieurs lacunes. D'une part, il était essentiel de mentionner le fait qu'une telle matrice est diagonalisable dans une base *orthonormée*, et de se placer dans une telle base pour effectuer le raisonnement : en effet, si P est orthogonale, une égalité du type $\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i e_i\|^2$ ne vaut que dans une telle base. D'autre part, si l'on a bien l'égalité $\|PDP^{-1}x\| = \|DP^{-1}x\|$, la relation $\|DP^{-1}x\| = \|Dx\|$ est en général fausse ; en outre, s'il est vrai que lorsque P est orthogonal et x appartient à S^{n-1} alors il en est de même de $P^{-1}x$, il reste à préciser que $P^{-1}x$ décrit entièrement S^{n-1} lorsque x décrit S^{n-1}.

Question 4. Il s'agissait d'une question très classique de diagonalisation d'une matrice simple. Nul n'était besoin de calculer le polynôme caractéristique de J_n pour déterminer ses valeurs propres : il suffisait de constater que son rang est égal à 1, de sorte que le noyau de l'endomorphisme associé j_n est de dimension $n-1$ en vertu du théorème du rang, et c'est également le sous-espace propre pour la valeur propre 0 ; on déterminait la seule autre valeur propre de J_n avec la trace. Trop peu de candidats ont utilisé le caractère symétrique de J_n pour obtenir le sous-espace propre associé à la valeur propre n comme orthogonal du noyau ; on pouvait également utiliser le fait qu'il est identique à l'image de j_n , donc que les colonnes de J_n en fournissent une base. En fait, curieusement, de nombreux candidats n'ont même pas donné les sous-espaces propres associés. Quant à la valeur de $\| J_n \|_{\text{op}}$, évidemment égale à n, elle résultait des valeurs propres de J_n et du fait que c'est une matrice symétrique, ce qui n'a pas été souvent rappelé à ce moment.

Question 5. Il suffisait, en notant $(e_1 , \ldots, e_n)$ la base canonique de R^n, de minorer $\|M\|_{\text{op}}$ par $\| Me_i \|$ pour tout i, puis de minorer $\| Me_i \|$ par chacun des $M_{i,j}$.

Question 6. Alors que cette inégalité découlait aisément de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous avons lu de nombreuses « démonstrations » recourant à des inégalités manifestement fausses, du genre $\left\| \sum_{i=1}^{n} M x_i e_i \right\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \| M x_i e_i \|^2$, laquelle ne vaut évidemment que si M est symétrique. Le fait que M soit de rang 1 a souvent été mentionné comme condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité demandée soit une égalité, mais sans aucune démonstration ni justification.

Question 7. La première partie de la question résultait immédiatement de la question précédente. Bien peu de candidats ont caractérisé et dénombré correctement les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\| M \|_{\text{op}} = n$, alors qu'il s'agissait simplement de trouver toutes les matrices de rang 1 dont tous les éléments sont tous égaux à 1 ou à -1.

Question 8. Cette question facile d'analyse a généralement été bien traitée, toutefois les inégalités entre les coefficients respectifs des deux séries entières ont été établies avec plus ou moins de rigueur ; le terme constant a souvent été oublié.

Question 9. Certains candidats ont une conception sommaire de la convexité. Pour compléter le raisonnement déjà bien amorcé par la question, il importait de préciser que les coefficients $\frac{1+x}{2}$ et $\frac{1-x}{2}$ sont positifs et de somme égale à 1.

Question 10. L'inégalité $\exp(tX) \leq \frac{1+X}{2}\exp(t)+\frac{1-X}{2}\exp(-t)$ résultait simplement du 9° et du fait que X est bornée par 1. Avant de poursuivre, il convenait de justifier l'existence de l'espérance de $\exp(tX)$, qui résulte tout simplement du fait que X est bornée. Le passage aux espérances devait ensuite être justifié par la croissance de l'espérance, puis sa linéarité permettait d'en déduire la majoration de $\mathsf{E}(\exp(tX))$ par $\mathrm{ch}(t)$. Un simple changement de paramètre t permettait de terminer la question.

Question 11. L'indépendance des variables aléatoires $\exp(t\mu_i X_i)$ permettait de justifier que l'espérance de leur produit est égale au produit de leurs espérances.

Question 12. L'inégalité $(X \geq \lambda)$ est évidemment équivalente à $(\exp(tX) \geq \exp(t\lambda))$, ce qui permettait de déduire l'inégalité demandée de l'inégalité de Markov, comme de nombreux candidats l'ont établi. Dans la deuxième partie, on utilisait le fait que l'évènement $(|X| \geq \lambda)$ est réunion disjointe des évènements ($X \geq \lambda$) et ($X \leq -\lambda$), ainsi que le fait que si X est α-sous-gaussienne alors $-X$ l'est également, comme l'ont précisé de nombreux candidats.

Question 13. Cette question a donné souvent lieu à des raisonnements interminables et confus, concluant difficilement et souvent partiellement aux assertions demandées. Or il suffisait de mettre bout à bout trois remarques élémentaires rarement toutes formulées : pour tout entier k, l'évènement ($X \geq k$) est identique à l'évènement ($\lfloor X \rfloor \geq k$) ; comme $0 \leq X - \lfloor X \rfloor \leq 1$, l'espérance de $X - \lfloor X \rfloor$ existe, donc l'existence de l'espérance de X équivaut à l'existence de celle de $\lfloor X \rfloor$; la croissance et la linéarité de l'espérance impliquent que $0 \leq \mathsf{E}(X) - \mathsf{E}(\lfloor X \rfloor) \leq 1$, ce qui implique l'inégalité demandée.

Question 14. La première partie de la question était, dans le cas où $k \geq 2$, une application de l'inégalité de la question 12 avec $\lambda = \sqrt{\dfrac{2\ln k}{\beta^2}}$, le cas où $k = 1$ étant évident. La deuxième partie consistait en la preuve de la convergence d'une série et en la majoration de sa somme par majoration de son terme général. Cette question a souvent été traitée correctement par les candidats.

Question 15. De nombreux raisonnements étaient viciés depuis le départ car ils procédaient comme suit. Supposons qu'il n'existe pas de sous-ensemble fini A de K tel que $K \subset \bigcup_{a \in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$. Soit A un sous-ensemble fini de K, et soit x un élément de K n'appartenant pas à cette réunion : alors il existe une suite de Cauchy qui converge vers x, et en ajoutant à A les éléments de cette suite de Cauchy jusqu'à un certain rang, on en déduit que x appartient à A, ce qui contredit l'hypothèse faite. Étant donné qu'on a modifié A, il n'y a en réalité pas de contradiction avec cette hypothèse ; tout ce qu'on a montré, c'est que pour tout élément x de K, il existe une partie finie A de K tel que x appartienne à $\bigcup_{a \in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$; mais il n'est certainement pas besoin de ces circonvolutions pour le prouver, il suffit de prendre $A = \{x\}$. Et surtout, on n'a absolument pas prouvé le résultat demandé.

Quelques candidats ont raisonné en disant que puisque K est compact, il est borné, donc en prenant un réseau assez serré de points de R^n et en ne retenant que les points contenus dans K, on obtiendra une partie finie de K qui répond à la question. Malheureusement, outre le fait que le réseau proposé n'était pas assez serré (le côté des hypercubes devait être de longueur inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ pour que leur plus longue diagonale soit inférieure à ε, donc pour que les boules centrées sur ce réseau recouvrent entièrement R^n), la forme de K pouvait être suffisamment tordue pour qu'il ne continsse aucun point de ce réseau, en tout cas pas suffisamment pour que les boules centrées sur ses points contenus dans K ne continssent pas K tout entier. C'était néanmoins une idée intéressante.

Question 16. On pouvait soit prouver directement par l'absurde que Λ est fini puis majorer son cardinal par celui de A, soit résoudre simultanément les deux premiers points de la question en prouvant que l'application qui à chaque élément de Λ associe la boule de rayon $\frac{\varepsilon}{2}$ centrée en $a \in A$ qui le contient est injective, ce qui montre à la fois que Λ est fini et qu'il est de cardinal inférieur ou égal à celui de A. Le dernier point se démontrait aussi aisément par l'absurde ; par contre, il était faux d'affirmer que lorsque Λ est de cardinal maximal, son cardinal est égal à celui de A, et que l'application précédemment définie est alors bijective.

Question 17. Cette question était simple et a très souvent été abordée, toutefois il était nécessaire de préciser que si le volume de la réunion des boules $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ pour $a \in \Lambda$ est égal à la somme de leurs volumes, c'est parce que ces boules sont deux à deux disjointes.

Question 18. Il suffisait pour traiter cette question d'exploiter les résultats obtenus dans plusieurs des questions précédentes, ce qui a été fait correctement par un grand nombre de candidats.

Question 19. Une nouvelle fois, la résolution de cette question exploitait les résultats obtenus dans des questions précédentes, dont pour commencer les questions 11 et 14. Ensuite, la majoration de l'espérance requérait l'indépendance des variables aléatoires $\exp(\gamma y_i{}^2)$ qui résulte de ce qu'on appelle le *lemme des coalitions*, selon lequel des variables aléatoires fonctions qui sont des fonctions continues de groupements disjoints de variables aléatoires toutes indépendantes entre elles sont elles-mêmes indépendantes. On concluait en utilisant l'inégalité de Markov. Un nombre conséquent de candidats ont traité correctement cette question.

Question 20. L'existence de a résulte d'un raisonnement simple et de la définition de $\| M^{(n)} \|_{\text{op}}$ en tant que maximum. L'inégalité demandée ensuite est une conséquence simple des questions 17 et 19. Un nombre non négligeable de candidats a traité cette question, et certains ont rédigé le sujet dans son intégralité.

La confection d'un problème de concours est une tâche difficile, car il doit autant que possible aborder les différentes parties du programme, classer les candidats tout en restant abordable par un étudiant moyen, ne pas être trop long et en même temps aboutir à un résultat significatif sinon intéressant. Ce cahier des charges nous paraît avoir été rempli haut la main par le présent sujet. Les membres du jury du concours commun Mines Ponts, correcteurs de l'épreuve de Mathématiques II, mettront, s'ils sont sollicités à cette fin, toute leur énergie et tout leur savoir-faire pour qu'il en soit de même pour les sujets des sessions ultérieures.
