## 1.2 D - MATHEMATIQUES II - filière MP

### I) REMARQUES GENERALES

Le sujet de cette année portait sur quelques propriétés géométriques du groupe orthogonal.
Il s'agissait essentiellement de démontrer que son enveloppe convexe est la boule unité de l'espace vectoriel des matrices pour la norme subordonnée à la norme euclidienne et qu'elle en constitue exactement l'ensemble des points extrémaux.

Il s'agissait donc essentiellement d'un sujet d'algèbre, même s'il faisait utiliser dans les parties C et D quelques notions de topologie.
C'était un sujet classique, dans la mesure où plusieurs questions constituent en elles-mêmes des exercices habituellement posés, voire des démonstrations de certains points de cours. En cela, il devait permettre aux candidats sérieusement préparés de traiter valablement une partie conséquente du problème.

En réalité, plusieurs d'entre elles ont été moins réussies qu'attendu et ceci nous paraît surtout résulter du fait que les candidats n'ont pas été assez attentifs, d'une part au contexte et d'autre part ne maîtrisent pas suffisamment les notions employées, comme nous allons tâcher de l'expliquer dans les remarques par question.

### II) REMARQUES PARTICULIERES

*Question 1.* La plupart des candidats identifient, explicitement ou non, une matrice $A$ carrée d'ordre $n$ à l'endomorphisme $f$ qui lui est canoniquement associé, autrement dit qui est tel que $A$ est la matrice de $f$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$. De ce fait, ils ont complètement ignoré l'objet essentiel de la question en ne traitant celle-ci que quand $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{R}^n$, ce qui est un cas particulier tout à fait élémentaire.

Quand ils ont considéré une autre base, nous avons souvent lu des expressions du genre : « Soit $A'$ la matrice de $A$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ». Nous n'avons vu que trop rarement les deux points qui nous paraissaient les plus importants, à savoir le fait que $\langle Ae_i, e_i\rangle$ est le $i$-ème élément diagonal de la matrice $A'$ de $f$ dans la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, et le fait que deux matrices semblables ont même trace.

*Question 2.* Cette question a globalement été assez bien traitée, malgré l'oubli chez certains de l'une ou l'autre des propriétés du produit scalaire. Précisons tout de même que la positivité de $\langle\ ,\ \rangle$ ne signifie pas que $\langle A, B\rangle \geq 0$ pour tous $A$ et $B$ et que la trace de ${}^tAB$ n'est pas la somme des produits de leurs éléments diagonaux.

*Question 3.* Les difficultés causées par cette question ont été d'ordre conceptuel bien plus que calculatoire. Ainsi, plusieurs candidats ont utilisé le théorème de diagonalisation simultanée, ce qui certes simplifie bien le calcul . Malheureusement, les matrices $A$ et $B$ n'avaient aucune raison de commuter. Quant à la trace du produit de trois matrices ou plus, elle n'est pas invariante par n'importe quelle permutation de celles-ci comme certains semblent le croire. Enfin et surtout, la minoration fréquemment vue ne pouvait être utilisée sans disposer d'abord de la positivité de $\langle Ae_i, e_i\rangle$ pour tout $i$.

*Question 4.* Il convient de rappeler que la notion de « matrice positive » n'a de sens dans le cadre du programme que si celle-ci est symétrique, de sorte qu'il convient de prouver la symétrie avant la positivité. En outre, il ne suffit pas pour qu'une matrice symétrique soit positive que ses éléments diagonaux soient positifs. Ce n'est pas non plus une matrice dont tous les éléments sont positifs. De même, la positivité de la trace, donc de la somme des valeurs propres, n'implique pas la positivité de toutes les valeurs propres, même si on ajoute la positivité du déterminant, donc du produit des valeurs propres. Par ailleurs, il ne suffit pas de vérifier que $\langle {}^tAAX, X\rangle \leq \lambda$ pour les colonnes propres de $A$ de norme 1 pour en déduire que $\|{}^tAA\|_2 \leq \lambda$ : il reste à démontrer que $\|{}^tAAX\| \leq \lambda$ pour toutes les matrices colonnes de norme 1.

Du reste, cette question a souvent été plus ou moins escamotée par certains candidats qui se sont manifestement référés à leur cours sur la norme d'une matrice symétrique.
Il convient donc ici de rappeler précisément ce qui est dans le programme, et comment on pouvait l'utiliser :

*« Pour un endomorphisme u d'un espace euclidien, relations* $\|u^*\| = \|u\|$ *et* $\|u\|^2 = \|u^*u\|$. *Lorsque u est autoadjoint positif,* $\|u\| = \sup\{(u(x), x) ; \|x\| \leq 1\} = r(u)$, *où* $r(u)$ *est la plus grande valeur propre de u.* »

Il était donc tout à fait licite, une fois démontré que ${}^tAA$ est symétrique positive, d'écrire en utilisant les relations matricielles correspondantes : $\|A\|_2^2 = \|A^*A\| = \max\{\lambda ; \lambda \in \mathrm{Spec}(A^*A)\}$, même si le fait de que l'on demande de *montrer* que $A^*A$ est symétrique positive devait inciter à *démontrer* ces résultats, ce que d'ailleurs la plupart des candidats ont fait – ou tout au moins tâché de faire. Par contre, écrire les égalités $\|A\|_2^2 = \|A^*\|_2 \|A\|_2 = \|A^*A\|_2$ est éminemment suspect car on laisse ainsi penser que l'on croit que $\| \ \|_2$ est une norme d'algèbre, ce qui est faux.
D'ailleurs, ceux qui se sont dispensés de la démonstration n'ont pas souvent utilisé clairement les résultats du cours, voire ont confondu $\|A\|$ et $\|A^*A\|$, ou même ont considéré que $A$ est diagonalisable. Enfin, certains candidats ont utilisé la formule $\|A\|_2 = \sup\{|\lambda| ; \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}$ qui ne vaut que pour les matrices symétriques et pas dans le cas général.

*Question 5.* Bien qu'ait été souvent vu le principe consistant à considérer la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les racines carrées des valeurs propres de $A^*A$, plusieurs copies ont péché par manque de précision.
Il convient donc de rappeler ici les points suivants :

- le fait que $h^2$ soit autoadjoint n'implique nullement que $h$ le soit ;
- une matrice semblable à une matrice symétrique n'est pas nécessairement symétrique ;
- le fait que la matrice d'un endomorphisme dans une base est diagonale ne permet d'en déduire que cet endomorphisme est autoadjoint que si cette base est orthonormale.

*Question 6.* Cette question a montré que certains candidats sont bien peu au point avec les notions d'injectivité et de surjectivité. Tout d'abord, le fait que   soit la restriction de $h$ à Im $h$ n'implique pas que Im   soit égal à Im $h$ et le fait que   envoie Im $h$ dans lui-même n'implique pas que cette application soit surjective. Quant à l'injectivité, elle a souvent résulté d'implications non justifiées du genre $\langle h(x), h(y)\rangle = 0$ pour tout $y \in$ Im $h$ implique $x = 0$. Signalons qu'essentiellement, la bijectivité de   résulte du théorème dit souvent « noyau-image », disant que la restriction d'une application linéaire à un supplémentaire du noyau réalise une bijection de celui-ci sur son image et du fait que le noyau et l'image d'un endomorphisme auto-adjoint sont supplémentaires.

*Question 7.* De nombreuses erreurs dans la manipulation des normes ont été commises dans cette question. Un certain nombre de candidats ont cru pouvoir démontrer que $\|h(x)\| = \|f(x)\|$ pour tout $x \in E$ en établissant que $\| h \| = \| f \|$, ce qui n'est pas suffisant. En outre, le choix de la norme n'est pas indifférent : deux vecteurs dont les normes du sup des coordonnées sont égales n'ont aucune raison d'avoir la même norme euclidienne. Dans la suite de la question, le fait que $\|h(x)\| = \| f(x)\|$ pour tout $x \in E$ implique aisément l'égalité des noyaux de $h$ et de $f$, mais nullement celle de leurs images. Quant à l'égalité des dimensions de celles-ci, elle n'en découle pas directement mais seulement *via* l'égalité des noyaux et le théorème du rang. Enfin, mentionnons le fait que si $f$ est un isomorphisme entre deux espaces vectoriels, l'application $g$ définie par —— n'est pas forcément linéaire. Donc on ne peut bâtir une isométrie entre eux par ce procédé.

*Question 8.* Peu de candidats ont vu comment construire $u$ en considérant séparément l'image des vecteurs du noyau de $h$ et de son image.

*Question 9.* La traduction matricielle du résultat de la question 8 a généralement été vue. Toutefois les candidats n'ont pas toujours mentionné le fait que la matrice d'un endomorphisme autoadjoint est symétrique dans une base orthonormale.

*Question 10.* Cette question et la suivante ont causé de nombreuses erreurs et beaucoup de difficultés aux candidats, qui ont manifesté bien peu de vision géométrique de la situation considérée. Certains ont platement utilisé le théorème de la projection orthogonale comme si $H$ était non un convexe compact mais un sous-espace vectoriel, qu'ils ont d'ailleurs souvent représenté comme tel dans une figure. En outre, l'indication ne permettait pas d'établir l'existence mais seulement l'unicité de $h_0$. Enfin l'inégalité triangulaire $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ a parfois été écrite avec les carrés des normes, auquel cas elle est fausse si l'angle formé par $x$ et $y$ est obtus.

*Question 11.* Lorsqu'elle a été valablement traitée, souvent seule la nécessité de la condition proposée a été établie, mais non la suffisance.

*Question 12.* De nombreux candidats ne se sont pas préoccupés du fait que pour que $x$ soit combinaison convexe des $x_i$ , il importe de vérifier que tous les coefficients de l'écriture de $x$ comme combinaison linéaire des $x_i$ sont positifs ou nuls. Le même oubli s'est généralement produit à la question 14. En outre, souvent seule l'une des deux inclusions a été démontrée.

*Question 13*. Cette question simple a généralement été bien traitée.

*Question 15.* Il semble nécessaire de rappeler que l'image réciproque d'un compact n'est pas nécessairement compacte. Souvent l'application introduite dont l'image est Conv($H$) est indiquée comme définie sur $\Lambda \times H$, ou même parfois sur $H$, alors qu'en réalité elle est définie sur $\mathbf{R}^{n+1} \times E^{n+1}$, et Conv($H$) est l'image par cette application de $\Lambda \times H^{n+1}$.

*Question 16.* Rappelons que : $O_n(\mathbf{R})$ n'est pas l'ensemble des matrices de déterminant égal à $\pm 1$ et que ce n'est pas non plus un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbf{R})$.

*Question 17.* La norme utilisée dans la question 16 est souvent la norme $\| \quad \|_1$, alors que dans cette question on utilise la norme $\| \quad \|_2$. Il convient de bien marquer la différence entre ces deux normes.

*Question 18.* Cette question ne présentait guère de difficulté quand on pensait à employer les résultats de la partie C.

*Question 19.* Il est faux d'écrire $< MUSe_i\ , e_i > \leq < USe_i\ , e_i > = < Se_i\ , e_i >$. Il fallait d'abord utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

*Question 21.* Cette question a souvent rédigée de manière trop imprécise, sans faire apparaître assez clairement les différentes étapes du raisonnement. Le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ou de Minkowski) était un premier point de passage obligé, puis le fait que les normes de $UX$ et $WX$ ne pouvant être égales qu'à 1, ces vecteurs ne pouvaient qu'être égaux.

*Question 22*. Cette question a souvent été correctement traitée. Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt sur une base quelconque de diagonalisation de $A$ ne pouvait être employé ici car les sous-espaces propres ne sont pas nécessairement orthogonaux. Du reste, rien ne dit que $A$ est diagonalisable.

*Question 23.* Cette question relativement simple a été souvent correctement traitée par les candidats qui sont parvenus à ce point du problème.

*Question 24.* Il n'a pas souvent été vérifié que les matrices $A_\alpha$ et $A_{-\alpha}$ appartiennent bien à B. C'était loin d'être toujours le cas. Bien sûr, il fallait pour pouvoir conclure que ces deux matrices soient également différentes de $A$.

## III) <u>CONSEILS AUX CANDIDATS</u>

Plus que de connaissance du cours, c'est de pratique que nous ont paru manquer les candidats de cette année.

Il nous paraît donc utile de rappeler l'importance des exercices et des devoirs pour acquérir la maîtrise des notions étudiées.

Au-delà de l'apprentissage du cours, refaire ceux vus en classe puis en traiter de nouveaux nous paraît être un élément essentiel d'une préparation efficace.

Loin de constituer un bachotage stérile, sans chercher à apprendre par cœur, mais en prenant le temps de réfléchir à l'articulation des raisonnements dans chaque sujet, cela permet de comprendre le fonctionnement des outils mathématiques et d'acquérir les méthodes qui seront plus tard celles du futur ingénieur ou chercheur dans la résolution de problèmes nouveaux.