

### I) REMARQUES GENERALES

Le sujet de cette année portait sur quelques propriétés de la transformation de Fourier des fonctions d'une variable réelle, permettant d'aboutir à la formule de Poisson  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n)$  pour des fonctions possédant une propriété de majoration suffisante en l'infini, ainsi que leur transformée de Fourier. Il en donnait trois applications : la formule d'inversion de Fourier, le théorème d'échantillonnage de Whittaker et la resommation d'Ewald. Il fournissait également le contre-exemple de Katznelson à la formule de Poisson dans le cas où l'on suppose seulement  $f$  intégrable ainsi que sa transformée de Fourier.

L'avis général des correcteurs sur les prestations des candidats est assez mitigé. D'une part, ils constatent que la qualité de la rédaction a tendance à se dégrader depuis quelques années : écriture parfois difficilement lisible, présentation peu claire, nombreuses ratures dans certaines copies, rédaction sommaire ou incorrecte ; invocation d'un « théorème du cours » ou d'un « résultat connu », au lieu de nommer le théorème en question ou de décrire succinctement le résultat utilisé. D'ailleurs, quand le candidat recourt à un théorème, on attend de lui qu'il prenne la peine de citer et de vérifier, dans le contexte considéré, les hypothèses permettant son application. D'autre part, le problème a été finalement assez peu réussi, les raisonnements sur les questions 1 à 13 ayant été souvent peu soignés. Les questions suivantes ont été rarement traitées avec succès.

Sans présenter de réelle difficulté jusqu'à la question 13, ce problème requérait toutefois une bonne connaissance du cours, une lecture attentive de l'énoncé et une bonne compréhension des notions employées. La rédaction se devait d'être à la fois suffisamment concise pour ne pas perdre de temps et suffisamment exhaustive pour convaincre le correcteur du fait que le candidat a compris la question et qu'il l'a résolue correctement et complètement. En allant trop vite sur la première moitié du sujet, de nombreux candidats y ont perdu plus de la moitié des points. Ce qu'ils ont rédigé sur les questions suivantes ne leur ont pas permis de les récupérer. C'est ce que nous allons à présent exposer en détail.

### II) REMARQUES PARTICULIERES

*Question 1.* Il suffisait pour y répondre de connaître son cours sur la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre. La condition de domination est bien sûr essentielle et a été très généralement fournie. Au vu des copies de quelques candidats, faisons toutefois remarquer que la fonction  $x \mapsto e^{2i\pi x\xi}$  n'est pas intégrable sur  $\mathbb{R}$  et que le produit de deux fonctions intégrables sur  $\mathbb{R}$  n'est pas toujours intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

*Question 2.* L'énoncé affirmant que  $L$  et  $L^*$  sont des espaces vectoriels, il n'était pas nécessaire de le démontrer et notamment de vérifier que si  $f$  et  $g$  sont telles qu'il existe  $\alpha > 1$  et  $\beta > 1$  tels que les fonctions  $x \mapsto |x|^\alpha f(x)$  et  $x \mapsto |x|^\beta g(x)$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$ , alors  $f + \lambda g$  possède la même propriété pour tout réel  $\lambda$ . Par contre, il importait de préciser qu'en raison de la linéarité de l'intégrale, la transformée de Fourier de  $f + \lambda g$  est  $\hat{f} + \lambda \hat{g}$ , de sorte que si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $W$  (resp.  $W^*$ ) alors il en est de même de  $f + \lambda g$ . Rappelons également, à toutes fins utiles, qu'aucune fonction de la forme  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  n'est intégrable sur  $]0, +\infty[$  ni *a fortiori* sur  $\mathbb{R}$ .

*Question 3.* Cette question a très généralement été correctement traitée, mis à part le fait qu'il n'était pas toujours précisé que les changements de variable effectués sont affines, ou constituent des bijections de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et que la conclusion attendue, à savoir la stabilité de  $W$  et  $W^*$  par translation, multiplication par une exponentielle complexe et homothétie de la variable, n'en était pas toujours tirée.

*Question 4.* Les valeurs de  $\hat{s}(0)$  et  $\hat{t}(0)$ , pourtant simples à obtenir, étaient rarement précisées. Mais surtout, le calcul de  $\hat{t}(x)$  pour  $x$  non nul était rarement correct, bien que s'étalant souvent sur deux ou trois pages. Il pouvait pourtant être effectué de manière simple et concise en exploitant la parité des parties réelle et imaginaire de la fonction  $x \mapsto t(x)e^{-2i\pi x\xi}$ . Il importe que les candidats sachent calculer sans erreur une intégrale requérant une simple intégration par parties. Après avoir réalisé un calcul soigneux au brouillon, il faut qu'ils soient en mesure d'en présenter clairement les principales étapes.

*Question 5.* La plupart des candidats ont vu que  $s$  appartient à  $L$  et  $L^*$ , mais non sa transformée de Fourier, ce qui permet d'obtenir le résultat demandé. Si, au vu de la question 3, on peut se ramener à la preuve de la non-intégrabilité de la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ , il ne suffisait pas de se contenter de l'affirmer et surtout il fallait éviter

d'affirmer que :  $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$  pour tout  $x > 0$ , or la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  n'est pas intégrable sur  $]0, +\infty[$ , donc la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$  ne l'est pas non plus. Par ailleurs, la non-continuité de  $s$  est une preuve simple du fait que  $W^*$  est distinct

de  $L$  à laquelle ont eu recours certains candidats.

Enfin, il semble nécessaire, à la lecture d'un certain nombre de copies, de rappeler les faits suivants :

- le fait pour une fonction de ne pas admettre de limite finie en l'infini n'implique nullement qu'elle ne soit pas intégrable ;
- le fait pour une fonction d'être la partie imaginaire d'une fonction non intégrable n'implique nullement qu'elle ne soit pas intégrable.

*Question 6.* De nombreux candidats ignorent la définition de la convergence en moyenne d'une suite de fonctions, pourtant explicitement au programme de MP. D'autres la confondent avec la notion de convergence en moyenne quadratique, ce qui bien sûr ne leur permettait pas de conclure. D'autres encore confondent la convergence en moyenne d'une suite de fonctions avec la convergence au sens de Césaro.

*Question 7.* Si l'existence de  $\tilde{f}$  et sa périodicité ne posaient guère de problèmes, il en allait tout autrement de sa continuité. Celle-ci résulte évidemment d'une propriété de convergence normale de la série de fonctions  $(f_n)$  définies par  $f_n(x) = f(x + n)$ . Mais contrairement à ce qu'ont écrit de nombreux candidats, cette convergence normale, ou même uniforme, ne peut avoir lieu sur  $\mathbb{R}$  tout entier. Car si  $f$  n'est pas la fonction nulle, la norme infinie de chaque  $f_n$  est égale au maximum de  $|f(x)|$  sur  $\mathbb{R}$ . Donc elle ne tend évidemment pas vers zéro et *a fortiori* leur somme est divergente. On peut s'en convaincre en choisissant par exemple  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  : la série de fonctions

$(f_n)$  présente alors un phénomène de « bosse glissante ». Par contre, il y a bien convergence normale sur tout compact, mais la majoration de  $\frac{M}{|x+n|^\alpha}$  quand  $x$  décrit un segment  $[a, b]$  et  $n$  décrit  $\mathbb{Z}$  requiert quelque soin pour

être effectuée sans erreur.

Rappelons en outre que pour prouver la convergence d'une série, on majore non le module de la série, ni même de ses sommes partielles, mais le module de son terme général. A la rigueur, on peut majorer les sommes partielles des modules. Rappelons également que l'on peut avoir simultanément  $f$  intégrable et la série des  $f(x + n)$  divergente pour certaines valeurs de  $x$  et même la suite des  $f(x + n)$  tendant vers  $+\infty$ , comme on peut le montrer avec des exemples classiques de séries de fonctions « pointes » de hauteur croissante et de largeur tendant vers zéro.

*Question 8.* La première étape de ce calcul est bien sûr l'échange entre le symbole de sommation et celui d'intégration. Cela peut être justifié soit par la convergence uniforme de la série de fonctions  $(g_n)$  définies par  $g_n(x) = f(x + n)e^{-2i\pi nx}$  (et non de celle de la série de fonctions  $(f_n)$ ), soit par la convergence de la série des intégrales des modules des  $g_n$ . Ensuite, le changement de variable  $y = x + n$  dans l'intégrale permet de se ramener à une série d'intégrales de la même fonction sur les segments  $[n, n + 1]$ , pour laquelle il n'y a plus qu'à appliquer une généralisation de la relation de Chasles. Il importait de veiller à choisir une lettre différente pour l'indice de sommation et pour l'indice du coefficient de Fourier et aussi de décrire clairement les différentes étapes de ce calcul.

*Question 9.* De l'appartenance de  $\hat{f}$  à  $L^*$  résulte la convergence normale de la série de Fourier de  $\tilde{f}$ . Par intégration terme à terme, désormais licite, résulte le fait que les coefficients de Fourier de  $\tilde{f}$  sont les  $\hat{f}(n)$ , de sorte que  $\tilde{f}$  est égale à la somme de sa série de Fourier. Ce résultat n'étant pas un théorème au programme devait être démontré. En outre, affirmer que cette propriété est vraie pour toute fonction intégrable, ou qu'elle résulte du théorème de Dirichlet, dénote une bien mauvaise connaissance de ce théorème et plus généralement des propriétés des séries de Fourier.

Certains candidats ont eu recours au théorème de Parseval, mais si celui-ci permettait bien de montrer que la série de Fourier  $S_{\tilde{f}}$  de  $\tilde{f}$  converge vers  $\tilde{f}$  pour la norme  $L^2$  sur  $[0, 1]$ , encore fallait-il en déduire que pour tout  $x \in [0, 1]$  on a  $\tilde{f}(x) = S_{\tilde{f}}(x)$ . Ceci pouvait être fait par exemple en prouvant d'abord la convergence uniforme sur

$[0, 1]$  de la série de Fourier de  $\tilde{f}$ , puis en utilisant le fait que la norme uniforme domine la norme  $L^2$ , de sorte que les limites de la suite des sommes partielles de la série de Fourier de  $\tilde{f}$  pour ces deux normes sont les mêmes.

*Question 10.* De nombreux candidats ont seulement vérifié que la généralisation de la formule de Poisson donne une écriture de  $\tilde{F}_x$  comme somme d'une série trigonométrique, sans s'assurer que les coefficients de celle-ci sont les coefficients de Fourier de  $\tilde{F}_x$ . En outre peu de candidats ont remarqué que le  $n$ -ième coefficient de Fourier de  $\tilde{F}_x$  est  $f(x - n)$  et non  $f(x + n)$ .

*Question 11.* Il suffit de reconnaître dans le premier membre de cette formule le coefficient de Fourier d'indice zéro de  $\tilde{F}_x$ , puis de déduire celui-ci des questions 3 et 8. Cette question a été traitée correctement par un peu moins d'un candidat sur deux.

*Question 12.* De la formule d'inversion de Fourier résulte que si on prend deux fois la transformée de Fourier d'une fonction de  $W^*$ , on obtient sa symétrisée  $\tilde{f}(x) = f(-x)$ . Donc si on la prend quatre fois, on retombe sur la fonction de départ.

Ainsi, toute valeur propre de la transformation de Fourier a une puissance quatrième égale à 1, donc les valeurs propres réelles peuvent être 1 et  $-1$ . La fonction  $t$  appartenant à  $W^*$  et étant paire, elle permettait de fabriquer deux vecteurs propres pour les valeurs propres respectives 1 et  $-1$ . Il convenait toutefois de vérifier qu'on obtient bien ainsi des fonctions non nulles, ce qui est facile en considérant leurs valeurs pour  $|x| > 1$ . La fonction gaussienne définie à la question 20 donnait aussi un bon exemple de vecteur propre pour la valeur propre 1.

*Question 13.* Si  $\hat{f}$  est nulle hors de l'intervalle  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , quand  $\xi$  décrit cet intervalle, le seul terme non nul de la série du second membre de la formule généralisée de Poisson est  $\hat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}$ . Si on choisit  $x = 0$ , on obtient alors l'expression de  $\hat{f}(\xi)$  en fonction des seuls  $f(n)$  pour  $n \in \mathbb{Z}$ . Une bonne partie des candidats ont bien vu qu'un seul terme de cette série est non nul, mais assez peu ont identifié ce terme comme étant celui pour  $n = 0$  lorsque  $\xi$  décrit  $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , seul intervalle sur lequel il vaille que l'on calcule la transformée de Fourier de  $f$ .

*Question 14.* Cette question a été rarement correctement traitée. Seuls quelques candidats ayant vu que la fonction proposée est telle que sa transformée de Fourier inverse s'annule en tout point de  $\mathbb{Z}$ . Il est donc impossible de la distinguer de la fonction nulle par la seule donnée des valeurs de  $f(n)$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Question 15.* Si une bonne partie des candidats a su montrer que  $f$  est nulle en tout point de  $\mathbb{Z}$ , moins nombreux ont été ceux qui ont vu que la série qui la définit est en fait une somme finie en tout point de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ . Encore moins nombreux ont été ceux qui ont vu que le nombre de termes de cette somme peut être choisi constant sur tout intervalle de la forme  $[n + \varepsilon, n + 1 - \varepsilon]$  pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  et tout  $\varepsilon > 0$ , ce qui assure la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{Z}$ . Remarquons qu'il est clairement faux que le noyau de Fejér  $K_N(x)$  est borné par 1, puisqu'il tend évidemment vers  $N$  quand  $x$  tend vers zéro.

*Question 16.* On pouvait justifier l'intégration terme à terme de la série de fonctions définissant  $f$  par la convergence de la série des intégrales des valeurs absolues des  $u_{k,N_k}$ . Très peu de candidats ont su calculer les intégrales de ces fonctions, ce qui est aisé une fois qu'on a remarqué qu'elles sont à valeurs positives et en déduire que la série en question est effectivement convergente. De la croissance de la suite des sommes partielles résulte alors la convergence en moyenne de la série des  $u_{k,N_k}$  vers  $f$ . On pouvait conclure en utilisant la question 6. Un certain nombre de candidats ont vu ce dernier point sans avoir traité ce qui précède.

*Question 17.* Cette question n'a pratiquement jamais été correctement traitée, essentiellement parce que les rares candidats qui l'ont abordée ont majoré trop grossièrement le noyau de Fejér puis, parce qu'ils ont majoré l'intégrale sur  $\mathbb{R}$  de  $\hat{u}_k$  en utilisant la borne supérieure de cette fonction sur le seul segment  $[n, n + 1]$ .

*Question 18.* Cette question difficile n'a été abordée que par une infime minorité de candidats.

*Question 19.* Les questions 15 à 18 ont permis de construire une fonction  $f$  appartenant à  $W$ , nulle sur  $\mathbb{Z}$ , et dont la transformée de Fourier vaut 1 en 0 et 0 en tout autre point de  $\mathbb{Z}$ . Cette fonction contredit donc la formule de

Poisson, ce qui prouve que celle-ci n'est pas valide pour toute fonction de  $W$ . Cette question n'a été traitée que par un petit nombre de candidats.

*Question 20.* Cette question a été traitée convenablement par un nombre non négligeable de candidats. Ils ont su utiliser correctement les résultats de la question 3 et la formule de Poisson pour obtenir la valeur attendue 49,5. Certains ont eu des difficultés pour majorer le reste, la manière la plus simple de le faire étant d'utiliser une série géométrique (on pouvait aussi utiliser la majoration  $e^x - 1 \leq xe^x$  valable pour tout  $x > 0$ ).

### **III) CONCLUSION ET CONSEILS AUX CANDIDATS**

Si une bonne connaissance du cours est un préalable incontournable à la réussite d'une épreuve, celle-ci résulte également d'une bonne compréhension de celui-ci, d'une lecture attentive du sujet et d'une attention soutenue au cours de l'épreuve de façon à vérifier en permanence que l'on traite celle-ci complètement et correctement. Il est par ailleurs important de bien percevoir les liens avec les autres questions du sujet.

La pratique des problèmes de concours est un exercice non seulement nécessaire pour la réussite des écrits, mais aussi un entraînement à la réflexion sur l'enchaînement des idées développées dans les questions successives. Qu'il s'agisse de devoirs maison ou de travaux en temps limité, c'est en essayant de les appréhender dans leur globalité et non en les traitant comme une succession d'exercices plus ou moins ennuyeux, que l'on progresse dans la compréhension du fonctionnement des notions du programme. C'est ainsi que l'on prend de la hauteur par rapport aux raisonnements, que l'on acquiert une véritable culture mathématique, en un mot, que l'on développe des qualités d'ingénieur et de chercheur.

Nous encourageons donc les futurs candidats à mener un tel entraînement sans relâche, non dans un esprit de « bachotage stérilisant pour la créativité et l'inventivité », mais au contraire dans le souci de développer ces qualités sur les schémas certes modestes mais souvent formateurs des problèmes de concours.

Car comme disait Sénèque : *stude, non ut plus aliquid scias, sed ut melius.*

---