## 1.2 D - MATHEMATIQUES II - filière MP

### I) REMARQUES GENERALES

Comme chaque année, le sujet était structuré afin de tester non seulement les connaissances des candidats mais aussi l'intégrité de leur démarche scientifique pour résoudre un problème complexe. La présence de nombreuses questions fermées << *Montrer que...* >> permettait de poursuivre le sujet en admettant clairement un résultat intermédiaire, mais inversement, les candidat n'obtennaient pas de crédit pour énoncer la réponse qui figurait déjà dans l'énoncé. Ils étaient jugés sur la précision de leur rédaction et la complétude et l'honnêteté de leurs démonstrations.

Le problème de cette année portait sur le calcul des variations. La partie préliminaire A testait les connaissances d'algèbre linéaire ainsi que le cours sur les équations différentielles linéaires. La partie B démontrait un lemme de Du Bois-Reymond qui permettait dans la suite de transformer une équation variationnelle en une équation différentielle. Ces parties étaient l'occasion pour les candidats de montrer le sérieux de leur préparation.

La partie C permettait de discuter, dans l'abstrait puis sur deux exemples, la condition d'Euler-Lagrange pour la minimisation d'une fonctionnelle définie sur l'espace vectoriel des fonctions $C^2$ ( [ 0,1] ; **R** ) et dont les valeurs sont prescrites au bord. Sans difficulté particulière, cette partie permettait de tester la capacité du candidat à construire un raisonnement.

La partie D était consacrée à l'étude d'une fonctionnelle définie sur l'espace des fonctions $C^4$ ($\mathbf{R}_+$ **; R)** et dont les deux premières dérivées sont de carré sommable. La condition d'intégrabitité permettait de transformer l'équation d'Euler-Lagrange d'ordre 4 en une équation différentielle d'ordre 2 qu'on devait résoudre afin d'expliciter tous les minimiseurs. Cette partie contenait des raisonnements plus subtiles sur des questions d'intégrabilité et ne se prêtait pas du tout au grapillage.

La partie E proposait, comme application, la démonstration d'une inégalité fonctionnelle de Hardy et Littlewood. En relisant attentivement les indications du sujet, cette partie pouvait être traitée en admettant les résultats antérieurs.

### II) REMARQUES PARTICULIERES

Question 1 : A quelques copies près, tous les candidats obtiennent $j^4 + j^2 + 1 = 0$.

Question 2 : La diagonalisation de la matrice $A$ a souvent posé des difficultés. On attire l'attention des candidats sur le fait que la simplification des calculs n'est pas une tâche à déléguer au correcteur ! Nous sommes conscients que les candidats sont libre de choisir les vecteurs propres, mais vu la réponse de la question 1, il est surprenant d'avoir des réponses exprimées avec un polynômes en $j$ de degré supérieur à 4 et choquant de rencontrer l'expression $j^3 - 1 = 0$ non simplifiée. Que dire alors des candidats qui proposent une matrice $U$ avec une colonne de zéros...

Question 3 : Une question de cours qui fait pourtant des ravages. Pour ceux qui utilisent l'expression exponentielle, on rappelle que la solution s'écrit $X(t) = e^{tA} X_0$ et que l'exponentielle de matrice ne commute pas avec le vecteur colonne.

Question 4 : En posant $Y = U^{-1}X$, on obtient l'équation équivalente $Y' = DY$. Noter qu'on n'a pas besoin de calculer explicitement $U^{-1}$. Il faut par contre exprimer les solutions en terme de $X$ et pas se contenter d'une solution implicite en $Y$.

Question 5 : La fonction $h$ est régulière par morceaux. Il faut étudier précisément son comportement en $t = \pm 1$. Il est surprenant que de nombreux candidats ne sachent pas tracer l'allure générale.

Question 6 : Choisir $x_0$ et $x_1$ est une erreur de logique grave, malheureusement trop fréquente ! On pouvait au choix proposer une formule explicite en s'inspirant de la question précédente ou bien déterminer les constantes $a, b$ pour que le translaté/dilaté $g(t) = h(at + b)$ convienne.

Question 7 : Un raisonnement par l'absurde standard mais qui déroute beaucoup de candidats : par continuité, on isole un intervalle $]x_0, x_1[$ où $F > 0$, puis on choisit pour fonction $u$, celle construite à la question précédente (en vérifiant qu'elle est bien dans $E^2_{0,0}$ !) puis conclure. Hormis les erreurs de raisonnement, une idée originale et intéressante était d'invoquer le théorème de densité de Weierstrass pour approcher $F$ par des fonctions $u$. Malheureusement, si $F$ n'est pas nulle au bord, cette méthode ne fonctionne pas. Dans ce cas, et faute de la bonne preuve, le candidat doit reconnaitre son erreur plutôt que d'essayer de masquer le problème. Une autre erreur commune consiste à faire des subdivisions de l'intervalle $]0,1[$. C'est inutile, cela masque le vrai argument et les candidats qui s'engagent dans cette voie finissent par énoncer des résultats fantaisistes sur les zéros des fonctions continues (leur structure est bien plus compliquée que l'imagination du candidat moyen !).

Question 8 : Il est vrai que l'intégrale d'un polynôme est une fonction polynomiale, mais ceci n'a rien à voir avec la question puisque la variable d'intégration $x$ n'est pas la variable polynomiale $t$ ! Cette question simple met en évidence le fait dramatique qu'une majorité de candidats ne sait pas substituer une formule dans une autre.

Question 9 : Beaucoup de candidats reconnaissent que l'hypothèse $q(t) \geq q(0)$ exprime un minimum du polynôme $q$, donc que $a_1 = q'(0) = 0$. Par contre peu savent calculer cette dérivée correctement et seules quelques copies pensent à intégrer par parties pour réutiliser la question 7 et conclure rigoureusement.

Question 10 : En général réussi. Trop d'erreurs de calcul sur une simple substitution.

Question 11 : Une question simple qui a pourtant déstabilisé beaucoup de candidats. Peu de candidats réalisent que la réponse exigeait deux parties : montrer que $J_1(f) \geq 1$ pour tout

$f \in E_{0,1}^2$, par exemple en utilisant Cauchy-Schwarz et d'autre part, exhiber une fonction $f$ particulière dans $E_{0,1}^2$ (par exemple $x \longmapsto x$) en laquelle la valeur 1 est atteinte. Certains ont le réflexe des espaces vectoriels normés de dimension finie et essayent un argument de compacité ce qui est malheureusement presque toujours voué à l'échec dans les espaces fonctionnels.

Question 12 : La rédaction est subtile car l'équation différentielle se ramène à une équation non-linéaire $(1+3y')y''=0$ pour laquelle Cauchy-Lipschitz n'est d'aucun secours. Il faut raisonner en combinant délicatement la continuité des fonctions avec le fait qu'un produit ne peut être nul que si l'un des facteurs est nul. Attention, trop de candidats concluent trop vite que $y = ax+b$ globalement alors que le passage du local au global mérite d'être justifié. Ensuite, les conditions au bord exigent $y = 0$. On peut aussi résoudre directement en intégrant.

Question 13 : Peu de candidats savent calculer... On obtient en fait $J_2(f) > 0$ donc pas de contradiction immédiate. Par contre, $J_2(\lambda f) \to -\infty$ lorsque $\lambda \to +\infty$ et donc zéro n'est pas un minimum.

Question 14 : Une rédaction subtile qui fait des ravages. Beaucoup trop de candidats sont persuadés que le contraire de << ne pas tendre vers $+\infty$ >> est : << avoir une limite finie >>, ce qui est complètement faux ! Ces candidats ont-ils jamais rencontrés la fonction $x \longmapsto \sin x$ ou la suite $(-1)^n$ ? On pouvait utiliser Cauchy-Schwarz pour montrer que $ff''$ est intégrable puis raisonner par l'absurde en supposant que $ff' \to \infty$ puis en déduire par intégration la contradiction que $f^2$ n'est pas intégrable.

Question 15 : Beaucoup de candidats obtiennent la formule :

$$\int_0^x f'(t)^2 dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t)dt$$

mais peu savent l'utiliser correctement dans un raisonnement. L'idée était que si $f' \notin L^2$ alors l'intégrale de gauche tend vers $+\infty$ . En utilisant la 1ere moitié de la question 14, on en déduit que $ff' \to \infty$ , ce qui contredit la 2nde moitié de la question 14. Ceci prouve que $f' \in L^2$ et en réutilisant l'identité, que $ff'$ a une limite à l'infini. On peut alors montrer facilement que cette limite ne peut qu'être nulle. Attention : beaucoup de candidats ne sont pas familiers avec $L^2$ et utilisent les réflexes des séries $l^2$. Il faut être conscient que la plupart des réflexes sont faux et chercher des contre-exemples sera très formateur.

Question 16 : Il s'agit d'éliminer les exponentielles croissantes dans les solutions de la question 4. Si l'idée est naturelle pour la plupart des candidats, la rédaction laisse à désirer. En particulier, beaucoup vérifient que chaque exponentielle n'est pas $L^2$ mais oublient que, sauf preuve du contraire, une combinaison linéaire pourrait très bien l'être !

Question 17 : La question précédente explicite $f = \alpha e_1 + \beta e_2$ donc il est facile de vérifier l'équation différentielle. Les indications de l'énoncé donnent $\alpha + \beta\sqrt{3} = 0$. Il reste donc à vérifier que $f$ est un multiple de $\psi$.

Question 18 : Beaucoup ont voulu << grapiller >> cette formule sans comprendre son utilité. Montrer que $(f + f')^2$ tend vers zéro à l'infini exige une rédaction subtile comme dans les questions 14 et 15. La vrai difficulté est de montrer que la limite existe. Un argument suggéré par quelques bonnes copies consiste à utiliser l'identité précédente couplée au fait que $L^2$ est un espace vectoriel. Une fois qu'on sait que la limite existe, on vérifie instantanément qu'elle est nulle.

Question 19 : Peu de candidats réalisent que la question précédente implique :

$$J(f) = (f(0) + f'(0))^2 + \int_0^{\infty} (f(t) + f'(t) + f''(t))^2 dt \geq 0$$

et qu'on trouve un minimiseur de cette somme de carrés en annulant simultanément chaque terme.

Question 20 : Rarement abordées, les deux dernières questions on été traitées correctement par les meilleurs candidats. En suivant l'indication de l'énoncé, on obtient un trinôme en $\mu$, de signe constant donc de discriminant négatif. On pouvait aussi reprendre l'identité de la question 18 $J(f_\mu) \geq 0$ puis optimiser en $\mu > 0$.

Question 21 : Presque aucun candidat n'a traité cette question. On peut combiner les réponses aux questions 18 et 20 pour obtenir $f(t) = \lambda\psi(t/mu)$.

### III) <u>CONCLUSION ET CONSEILS AUX CANDIDATS</u>

Les correcteurs rappellent aux candidats l'importance de la rigueur de la rédaction. En cas de questions fermée, ils doivent redoubler d'attention afin d'éliminer toute faille dans le raisonnement demandé.

Nous attirons aussi leur attention sur le fait que la connaissance pratique du cours passe non seulement par l'apprentissage (indispensable) des énoncés et de leurs démonstrations, mais aussi par la compréhension de l'intérêt des résultat et plus encore, de leurs limites de validité. Il est vivement conseillé d'associer, lors de l'apprentissage, chaque définition à au moins un exemple, un théorème et plusieurs contre-exemples.

Les équations différentielles linéaires, en particulier le lien avec l'algèbre linéaire et la réduction de matrices, ainsi que les techniques de base de calcul intégral semblent trop souvent méconnues et sujettes à de multiples et graves confusions.

Le sujet permettait aux candidats sérieux de montrer la qualité de leur préparation et récompensait ceux qui se sont appliqués à construire avec soin une fraction des démonstrations demandées. Les candidats ont ainsi eu l'opportunité de montrer les qualités nécessaires pour suivre avec succès une formation d'ingénieur.