1.2 D - MATHÉMATIQUES II - filière MP

I) REMARQUES GÉNÉRALES

L'épreuve, qui portait sur le support de la transformation de Radon, était très progressive et abordait des aspects variés de l'analyse figurant au programme MP. Elle a ainsi permis un bon échelonnement des copies, y compris dans le bas de l'échelle de notation.

De nombreux candidats se sont efforcés de suivre l'ordre des questions afin de mieux entrer dans la logique du problème. Cela leur a en général réussi, plutôt mieux qu'à ceux qui ont essayé de grappiller des points en traitant les questions qui leur paraissaient plus faciles.

II) REMARQUES PARTICULIÈRES

Question 1 : L'existence de F ne résulte pas de la force de conviction qu'y met le candidat. Seule une démonstration basée sur une expression explicite, comme par exemple :

$$F(t) = f(t,0)$$

permet d'en établir les propriétés requises, à savoir être de classe C^1 et à support compact.

Question 2 : La continuité des applications partielles de $T_{f,x}$ n'entraîne pas sa continuité par rapport au couple (y, φ). Cette erreur est très fréquente chez les candidats. Il peut être évitée en étudiant par exemple la fonction de R^2 dans R définie par :

$$\text{(x, y)} \to \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} \, si(x,y) \neq (0,0) \\ 0 \sin on \end{cases}$$

dont les applications partielles sont indéfiniment dérivables mais qui n'est pas continue en $(0,0)$.

Question 3 : Cette question est souvent bien traitée.

Question 4 : Pour répondre correctement à cette question il importait de bien lire le début de l'énoncé et de raisonner en s'aidant d'une figure. Seuls quelques candidats ont respecté les conditions voulues par l'énoncé sur les paramètres de $D_{x,\varphi}$, à savoir :

$$\left(p > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[\right) \text{ou} \left(p = 0 \text{ et } \theta \in [0, \pi[\right)$$

Question 5 : Cette question consistait en l'application du théorème de dérivation d'une intégrale à un paramètre, au programme de MP.

Il importait de bien identifier les variables et leur lien avec f, et il était aussi nécessaire, pour établir la dérivabilité des W_i, d'établir l'intégrabilité sur $[0, 2\pi]$ de l'application $\theta \mapsto \int_0^R f(x + ru_\theta) r dr$, ce qui amenait à montrer sa continuité, donc à employer le théorème de continuité d'une intégrale à un paramètre.

A propos de l'hypothèse de domination, signalons l'erreur suivante :

Lorsque par exemple, étant donnée une application h définie sur un produit $X \times Y$ de deux intervalles réels compacts, on veut établir la continuité de $x \mapsto \int_Y h(x,y)dy$, la seule évocation de la continuité de $y \mapsto h(x,y)$ conduit à une majoration sur Y de la forme :

$$\forall y \in Y, |h(x,y)| \leq M(x)$$

et n'établit donc pas la domination de h par une fonction $y \mapsto \phi(y)$ indépendante de x et intégrable sur Y.

Question 6 : De nombreux candidats sautent cette question, ou se contentent de paraphraser l'énoncé. Celui-ci étant très proche de la formule de Green-Riemann, il importait de citer cette formule correctement en mentionnant les hypothèses requises (P et Q fonctions de classe C^1, domaine simple) en précisant son lien avec l'énoncé.

Question 7 : La première égalité résulte du simple changement de variable $z = y - x$, de jacobien égale à 1.

La deuxième requérait d'abord le passage en coordonnées polaires du programme, puis le fait que pour $r > R$, le couple (x, r) appartient à Q_A et que donc, c'est $\int_0^{2\pi} f(x + ru_\theta)d\theta$ qui est nulle, et non pas la fonction f elle même.

Question 8 : La plupart des candidats n'ont pas été gênés par l'ambiguïté de la question qui demandait d'établir que les W_i sont constantes sur une boule de R^2 alors qu'aux fins de simplification, dans la question 5, seule l'une des deux variables réelles dont dépendaient ces fonctions avait été explicitée. Nombreux sont ceux qui ont bien utilisé les questions $7)$, $6)$ et $5)$ pour obtenir les relations $3)$ et $4)$.

Question 9 : La notation $y_i f$ désignait le produit de la fonction f par la fonction $(y_1, y_2) \mapsto y_i$; de sorte que l'on avait par exemple :

$$(y_1 f)(x + Ru_\theta) = (x_1 + R\cos\theta) f(x + Ru_\theta)$$

De trop nombreux candidats ont vu y_i comme une constante qu'ils ont fait sortir de l'intégrale. Il ne fallait pas non plus oublier d'établir que les fonctions $y \mapsto y_i f(y)$ étaient de classe C^1 à support compacte.

Question 10 : Cette question a causé d'importantes difficultés aux candidats.

Notamment, le lemme ne s'applique pas à la fonction $g(y) = f(y)\cos^k\theta\sin^l\theta$ qui n'est pas fonction de la seule variable y.

En revanche, on pouvait l'appliquer à la fonction $g(y) = y_i f(y)$, à condition toutefois de préciser que l'hypothèse de récurrence était "*pour toute fonction g satisfaisant les hypothèses du lemme (et non pas seulement f), l'identité (5) a lieu pour $k + l = n$* ".

On pouvait aussi remarquer que pour tout (k, l) la fonction $g(y) = y_1^k y_2^l f(y)$ satisfait les hypothèses du lemme, pour en déduire (5) par une récurrence sur n.

Question 11 : La plupart des candidats réussissent cette question. Signalons cependant que $\sin n\theta$ n'est pas un polynôme en $\sin\theta$.

Question 12 : Un nombre conséquent de candidats utilisent la formule de Parseval. D'autres utilisent la série de Fourier de f ou le second théorème de Weierstrass. Rappelons cependant la nécessité de vérifier que ces résultats sont bien applicables à f.

En outre, la convergence uniforme d'une suite (P_n) de polynômes trigonométriques vers f n'entraîne la convergence uniforme de $P_n f$ vers f^2 que parce que f est bornée, ce que les candidats ont parfois oublié de préciser.

Question 13 : Les candidats montrent facilement que f est nulle sur le cercle de centre x et de rayon R, mais ils parviennent plus rarement à en déduire que f est nulle sur le complémentaire de $B(O,A)$; ce qui requérait de montrer que tout point de cet ensemble est sur l'un de ces cercles.

Question 14 : Question en général bien traitée.

Question 15 : Il ne fallait pas oublier de mentionner que le changement de variable était bijectif et de classe C^1. Si on parlait de difféomorphisme, il fallait exclure la borne finie, car l'application $t \mapsto v+t^2$ est bien bijective C^1, mais sa réciproque n'est pas dérivable en v.

Question 16 : Rarement bien traitée, cette question nécessitait l'emploi de la relation (1).

Question 17 : Il fallait utiliser le Théorème de Fubini (et non Fubbini, Fubiny ou ...Fibonacci), en vérifiant ses conditions d'applications. Le plus simple était de remarquer que l'intégrale en t sur R avait lieu en fait sur un segment $[-M, M]$ que l'on pouvait choisir indépendant de θ, et de se ramener ainsi au théorème de Fubini sur un produit de deux segments.

Question 18 : La référence à la droite construite à la question 4 a été en général vue par les meilleurs candidats.

Question 19 : Cet ensemble est un cercle, et la signification géométrique attendue, en rapport avec le problème, était que le disque de centre O de rayon A est dans l'intérieur du disque de centre x et de rayon $\|y\|$.

Question 20 : Les meilleurs candidats prouvent en résolvant cette question qu'ils ont compris l'esprit du problème.

III) <u>CONCLUSION</u>

Une bonne connaissance du cours est indispensable à la réussite d'une épreuve.

De plus étaient nécessaires :

- La mention des hypothèses des théorèmes employés (questions 5, 12,17).

- Un suivi précis des variables du problème (questions 3, 5, 9).

- L'explicitation exacte de l'hypothèse de récurrence dans un tel raisonnement (question 10).