MATHÉMATIQUES

1.2 - Épreuves écrites

1.2 D - MATH II - filière MP

I) Remarques générales

Le but du problème est annoncé d'emblée : la démonstration de l'irrationalité de ln2.

La souplesse de l'énoncé , qui laissait le candidat essentiellement libre de ses réponses, a permis aux meilleurs de briller. Ceux d'entre eux qui ont réussi à mener un calcul (fût-il numérique), ou un raisonnement jusqu'au bout , ont été largement récompensés.

Il est en effet à déplorer beaucoup de raisonnements peu rigoureux et de calculs erronés. Un problème mathématique étant une construction , on peut demander aux candidats de faire preuve de cohérence et d'esprit critique.

Une partie d'entre eux se trompe sur les rayons de convergence, la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, et n'a pas l'idée de corriger les anomalies résultant des calculs obtenus : par exemple un rayon de convergence infini avec une fonction *f* qui s'écrit $f(x)= \dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$ …

La longueur du problème a fait que beaucoup de candidats n'ont pas abordé les dernières questions.

II) Remarques particulières

1-a) Il s'agissait d'une application simple du critère de d'Alembert. La question a été plutôt bien traitée malgré quelques problèmes de valeurs absolues.

1-c) Beaucoup d'erreurs ont été relevées dans l'intégration de l'équation différentielle ; trop de résultats du genre $\dfrac{y'}{y}$ = K sans justification, la constante K n'étant pas toujours déterminée.

2) Le rayon de convergence a posé problème. Il apparaît de temps en temps le coefficient $(-1)^k$ dans le développement en série entière de M_p .

D'autre part il ne faut pas confondre développement limité et développement en série entière, et se souvenir qu'une fonction de classe C^∞ n'admet pas nécessairement un tel développement.

3-a) Il est anormal de confondre encore ''signe'' et ''racines'' d'un trinôme du second degré.

3-b) La valeur absolue | 1-x | est souvent oubliée, ainsi que l'exclusion de la valeur –1 dans l'ensemble de définition demandé.

3-c) Cette question était plus délicate . La sommabilité de la suite double de terme général $C_{2n}^{n}\ C_{2n+k}^{k}\ x^{n+k}$ n'a été que très rarement établie et le rayon de convergence $3-2\sqrt{2}$ a été peu souvent trouvé.

Le calcul des a_n a donné lieu à des erreurs , ou à des résultats non simplifiés tels que $a_3 = \dfrac{189}{3}$.

4-a) Il est à nouveau à déplorer des erreurs de calcul élémentaires sur les b_n. Attention : g ne vérifie pas la même équation différentielle que f.

Il est de plus étonnant que certains candidats établissent une équation différentielle vérifiée par g sans avoir été capables d'établir celle vérifiée par f !

4-b) On pouvait appliquer la méthode de variation des constantes sans oublier la condition initiale g(0)=0.

4-d) Cette question d'arithmétique élémentaire n'a été que rarement traitée correctement.

5-a) La relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{n}{n+1} u_n$ a été en général trouvée. On pouvait remarquer que $u_n = \frac{1}{n}$ pour tout n > 0. Pour un candidat doté d'un peu d'esprit critique, le calcul des premiers termes donnait déjà une indication sur l'évolution de la suite.

5-b) Cette question a donné lieu à beaucoup de raisonnements faux. La seule invocation de l'inégalité $\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} \leq \frac{1}{a_n . a_{n-1}}$ ne suffit pas à démontrer la convergence de la suite ($\frac{b_n}{a_n}$). Dans le même ordre d'idée, la condition $\frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1}}$ tend vers 0 n'assure pas que la suite ($\frac{b_n}{a_n}$) soit de Cauchy.

6-a) Il convenait d'assurer l'appartenance à $]0,+\infty[\cup \{+\infty\}$ de $\int_0^{3-\sqrt{2}} f(t)dt$ pour pouvoir conclure que la limite de g(x) lorsque x tend vers $3 - 2\sqrt{2}$ est $+\infty$.

D'autre part le fait que f(x) tende vers $+\infty$ au point $3 - 2\sqrt{2}$ n'implique pas la ‘’ divergence ‘’ de $\int_0^{3-2\sqrt{2}} f(t)dt$.

A partir de là, peu de points ont été abordés, mis à part 7-b) et 7-c), en général bien traités (étude de la suite (w_n)) et quelques tentatives isolées dans la partie 8. Les très bons candidats ont réussi à mener à bien la fin de ce problème.

Pour terminer la question 6 est un exercice classique de MP, traité couramment lors du cours sur les séries entières. (comparaison des comportements des sommes partielles et des restes).

III Conseils aux candidats

De manière générale il est conseillé aux candidats d'affiner la précision des raisonnements, en jouant la carte de l'honnêteté , toujours payante, d'essayer de faire des calculs justes sans la calculette, et de tenir compte des indications fournies par l'énoncé.

Les copies claires et soignées sont appréciées, ainsi qu'une orthographe correcte : il est regrettable de lire ‘’ je n'est pas trouver ‘’ ou ‘’ le rayon de la série entière s'écrie ‘’ ou encore ‘’ c'est plus dure ‘’ etc …

Enfin il serait sage de la part des candidats de se montrer très circonspects lorsqu'ils pensent – souvent hâtivement – avoir détecté une erreur d'énoncé, car tel est rarement le cas.