1.5.3 Conclusion

Le jury note que les questions d'existence (en particulier, les **Q3**, **Q10** et **Q13**) posent des difficultés notamment parce que beaucoup de candidats ne commencent pas par construire l'objet dont on impose les contraintes et se contentent de phrases répétant plus ou moins l'énoncé. Dans ce genre de situation, un raisonnement de type Analyse-Synthèse se révèle souvent efficace.
Enfin le jury tient à signaler la proportion bien trop importante de copies où de manière répétée dans les questions dites fermées, où la réponse est indiquée, sont donnés à lire des arguments longs et vides de sens où la formule demandée finit par apparaitre. Cette stratégie non seulement n'apporte aucun point mais dessert au final le candidat qui sera ensuite plus sévèrement jugé lors de chacune des questions suivantes. L'honnêteté intellectuelle, notamment d'un scientifique, est une qualité grandement appréciée, et pas seulement des correcteurs.

1.6 Mathématiques 1 - filière PSI

1.6.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet de maths 1 PSI porte sur la convergence en loi de la moyenne empirique d'une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une condition de dispersion.

Le problème mêle les probabilités à divers chapitres d'analyse : analyse élémentaire de première année, séries numériques, convergence dominée, intégrales à paramètre continu, séries de fonctions... Peu de questions sont vraiment faciles, mais la plupart sont de difficulté raisonnable. Les premières parties étant relativement indépendantes, quasiment toutes les questions sont abordées par une bonne part des candidats.

Les correcteurs tiennent à souligner que, malgré la préparation rendue difficile par les conditions sanitaires, les candidats ont su assimiler les programmes des deux années de classe préparatoire, et aborder l'épreuve de façon satisfaisante.

Rappelons pour terminer que la qualité de la rédaction et la présentation sont prises en compte dans l'évaluation des copies, et nous invitons les futurs candidats à y veiller.

1.6.2 Analyse détaillée des questions

Q1 - La question déroute bon nombre de candidats. On attend ici la définition : X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. Nous recommandons aux candidats de travailler en priorité le cours.

Q2 - Dans beaucoup de copies, la variable aléatoire est considérée comme à valeurs dans un ensemble fini, ce qui n'a pas de raison d'être.

Q3 - On peut utiliser ici deux résultats au programme. D'une part le fait qu'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geq n)$ converge. D'autre part le fait qu'une variable aléatoire ayant un moment d'ordre deux possède un moment d'ordre un.

Q4 - On applique le principe du transfert en loi rappelé dans le préambule. Certains candidats ont prouvé directement la deuxième partie de la question en considérant les valeurs positives et négatives prises par la variable aléatoire.

Q5 - L'indépendance et la symétrie donnent que $(X, Y) \sim (-X, -Y)$. On utilise alors le transfert de l'égalité en loi

Q6 - La question est élémentaire. Dans un tiers des copies, la fonction est intégrée avec du logarithme ; le logarithme principal n'est pas au programme et de tels arguments ont été sanctionnés.

Q7 - Cette question simple, puisque ne portant que sur l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité, n'a été complètement traitée que par une très faible proportion de candidats. Une partie substantielle des candidats considère des inégalités entre complexes.

Q8 - La question est bien traitée dans la moitié des copies, ce qui est satisfaisant. On attend ici une référence explicite au théorème de convergence dominée, avec domination par une fonction indépendante de n.

Q9 - Il suffit d'utiliser **Q6** et **Q8**, et de connaître bien sûr la formule de Taylor avec reste intégral.

Q10 - Pour le premier point, on attend une continuité par composition. Pour le second, on peut le montrer par une étude élémentaire ou un argument de borne atteinte sur un fermé borné en dimension finie. Cette question difficile n'est traitée que par une poignée de candidats.

Q11 - Il faut ici établir le caractère C^1 d'une intégrale à paramètre. La plupart des candidats ont énoncé le théorème. L'expression de la dérivée partielle et la domination sur les segments ne sont pas toujours justes.

Q12 - Il reste à intégrer l'expression trouvée plus tôt, puis à déterminer une primitive de la fonction donnée. Les indications permettent aux candidats de traiter au moins partiellement la question.

Q13 - Cette question de synthèse demande du recul et n'est abordée que par un petit tiers des candidats.

Q14 - Question élémentaire de probabilité souvent traitée.

Q15 - . On applique ici la continuité de la somme d'une série de fonctions sous l'hypothèse de convergence uniforme. Les candidats ayant abordé ce point l'ont souvent correctement fait.

Q16 - La question est délicate et les arguments sont rarement donnés.

Q17 et 18 - Questions de synthèse, rarement abordées de façon satisfaisante.

Q19 - Question bien traitée dans un quart des copies.

Q20 - Question nettement plus délicate, rarement abordée.

Q21 - Question classique d'analyse de première année, correctement traitée par ceux qui l'ont abordée.

Q22 - Pas abordée.

1.7 Mathématiques 2 - filière PSI

1.7.1 Généralités et présentation du sujet

Le sujet portait sur l'analyse spectrale des opérateurs intégraux à noyau de type positif, qui sont une version continue des endomorphismes symétriques positifs d'un espace euclidien.
Les principaux thèmes abordés par le sujet étaient les suivants :

- les espaces euclidiens, et plus généralement les espaces préhilbertiens réels (questions 3, 7, 8, 9, 12, 14, 19 et 20) ;
- les intégrales à paramètre (questions 4 et 5) ;
- la topologie (question 3) ;
- les équations différentielles (questions 16 et 17).