1.2.C - MATHEMATIQUES 1 - filière PSI

I) REMARQUES GENERALES

L'épreuve de trois heures d'algèbre portait sur les projecteurs, les projecteurs orthogonaux avec les propriétés de positivité et de symétrie. Les questions de 1 à 9 étaient très proches du contenu du programme et ont permis d'avoir une bonne progressivité des notes. Le sujet recelait de questions plus ardues, en particulier les questions 16 et 18, et cet échelonnement dans la difficulté des questions a permis de bien départager les différents niveaux des candidats. Comme assez souvent, les dernières questions étaient une simple lecture de sujet et permettaient aux candidats ayant une vision d'ensemble de récupérer quelques points.

L'erreur de compréhension principale pour ce sujet a été de confondre projecteur orthogonal et endomorphisme orthogonal (le seul endomorphisme vérifiant ces deux propriétés étant bien sûr l'identité). Sinon pour T un endomorphisme, la notation Tx à la place de celle plus usuelle T(x) a été bien perçue par les candidats.

Terminons ces remarques générales par les points suivants :

- Même si cela a été assez peu répandu dans les copies, nous profitons de ce rapport pour rappeler aux candidats qu'il faut éviter de répondre à une question par un simple « il est évident que la propriété est vraie ».
- Pour chaque question, les candidats doivent vérifier s'ils ont répondu à chaque item, de bonnes copies perdant ainsi trop facilement un demi-point, alors que la réponse était manifestement à la portée de ces candidats.
- Lorsqu'un résultat précédent est utilisé, il ne faut pas écrire « d'après les questions précédentes ...», mais « d'après la question numéro tant ... ».
- Pour démontrer une équivalence (en particulier les questions 7, 8, et 9), les candidats seraient en général bien inspirés de séparer nettement l'implication et la réciproque (dans la majorité des cas, les raisonnements par équivalence étaient faux dans un sens).
- Lorsqu'une matrice diagonale avec des valeurs propres nulles est utilisée, une représentation de cette matrice décomposée suivant le noyau et l'image est un guide pour la rédaction et une aide fortement appréciée par le correcteur. Certaines copies se perdaient en circonvolutions pour affirmer des propriétés découlant assez simplement de l'écriture de la matrice.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Question 1 : La question la mieux réussie. Attention à ne pas confondre la matrice et l'élément (i, j) de la matrice.

Question 2 : Assez bien réussie. L'erreur la plus courante a consisté à écrire Tr(ABC)=Tr(BAC), au lieu de Tr(BCA). Il faut éviter de répondre « d'après le cours, les matrices semblables ont même trace », alors que c'est justement l'objet de la question.

Question 3 : On pouvait utiliser deux arguments parmi les trois suivants : un élément de l'intersection est forcément nul, tout élément x s'écrit x-Px+Px, et le théorème du rang. Il était inutile de préciser que la somme du noyau et de l'image était incluse dans l'espace X.

Question 4 : Souvent bien traitée, avec l'écriture matricielle dans une base bien choisie faisant apparaître un bloc identité et le reste constitué de zéros.

Question 5 : Souvent réussie, avec soit deux familles génératrices pour F et G, soit la formule de Grassmann, soit une démonstration de la formule de Grassmann avec l'endomorphisme qui à x, y associe x+y. L'utilisation directe de la formule de Grassmann, qui est un résultat de cours, était bien sûr valide. Cependant, cette question a mis en exergue un flou important sur des notions de base sur les espaces vectoriels chez certains candidats. Ainsi, on a vu une confusion entre somme et union d'espaces vectoriels, ou encore, la formule de Grassmann utilisée avec une erreur de signe.

Question 6 : L'usage du résultat précédent a été souvent perçu, mais peu de candidats ont pensé à préciser que l'image d'une somme est incluse dans la somme des images. Sinon le résultat simple que la trace de S est un entier était parfois oublié. Nous le répétons, il faut prendre le temps de relire chaque question après y avoir répondu.

Question 7 : De manière classique il fallait procéder par implication et réciproque. *Implication* : même si cela n'a pas été pénalisé, de nombreuses copies ont mentionné sur ce point et de manière inutile le caractère orthodiagonalisable de T. Sinon l'erreur principale a été de ne pas mettre en avant le fait que le vecteur considéré était non nul. L'inégalité ab >= 0 avec a >= 0 ne permet pas de conclure que b >= 0.

Réciproque : L'endomorphisme T étant symétrique, il est orthodiagonalisable. Beaucoup de candidats se sont contentés d'indiquer que T était diagonalisable, alors qu'il était nécessaire d'avoir des vecteurs propres orthogonaux. De plus, de trop nombreuses copies ont supposé de manière erronée que tous les vecteurs étaient des vecteurs propres.

Question 8 : De nombreux candidats ont confondu projecteur orthogonal et endomorphisme orthogonal. Pour la réciproque, prendre x dans le noyau et y dans l'image donnait rapidement le résultat souhaité. Les rédactions utilisant un x quelconque étaient souvent incomplètes.

Question 9 : La deuxième question où la confusion entre projecteur orthogonal et endomorphisme orthogonal était pénalisante. Souvent la symétrie a été prouvée pour x quelconque et y dans l'image, ce qui était insuffisant. Il suffisait de prendre y quelconque, remarquer que Py appartenait à l'image et appliquer le résultat de la question 8.

Question 10 : On pouvait préciser la forme de la matrice dans la base B. En particulier l'endomorphisme T restreint à Z était nul car les valeurs propres correspondantes étaient à la fois positives et négatives.

Question 11 : L'écriture de Q_i dans la base B s'avérait utile pour pouvoir trouver toutes les propriétés demandées. Des candidats ont montré que Q_i était un projecteur orthogonal en utilisant la question 8, mais sans prouver préalablement qu'il s'agissait d'un projecteur.

Question 12 : Il fallait indiquer qu'il existait i tel que λ_i était strictement supérieur à 1. Le calcul de la trace s'obtenait par simple linéarité (tr(T)-1), et a été assez peu réussi.

Question 13 : Certaines copies prenaient pour S la somme de tous les projecteurs Q_i pour i entre 1 et r. La solution était d'itérer la construction de la question 12 sur l'endomorphisme $T- Q_i$ jusqu'à ce que la trace soit égale au rang.

Question 14 : Comme S était nulle sur Z, le rang de S valait le rang de S restreint à Y. Ensuite le rang de S valant le rang de T donc la dimension de Y et la stabilité de Y par S, donnaient le résultat.

Question 15 : Il fallait vérifier les quatre propriétés du produit scalaire : linéarité, symétrie, positivité et le fait que ξ est définie positive. Nous attendions une simple remarque pour la symétrie de l'endomorphisme U^{-1}, qui était une conséquence immédiate de celle de S.

Question 16 : Peu traitée, cette question permettait à certains candidats de se détacher du lot. Il était cependant possible de traiter facilement le cas avec une valeur propre égale à 1. La solution générale faisait intervenir une valeur propre strictement supérieure à 1 et une autre, strictement inférieure à 1.

Question 17 : Cette question assez classique aurait pu être traitée plus souvent. Pour l'implication, le plus naturel par rapport à l'énoncé était d'utiliser la question 8, mais de nombreux candidats ont prouvé directement le résultat en utilisant un théorème de base incomplète (orthonormée), ce qui aboutissait au résultat voulu.

Question 18 : La différence de deux endomorphismes positifs n'est pas à priori positive. Pour résoudre cette question, il fallait utiliser la formule calculée dans la question 16.

Question 19 : L'égalité sur les espaces vectoriels renferme trois propriétés : deux inclusions et une somme directe. Il faut s'efforcer de réfléchir à chacune d'entre elles, la somme directe étant en particulier assez simple. L'égalité sur les rangs était également simple en admettant l'égalité précédente sur les espaces vectoriels.

Question 20 : On pouvait créer une suite S_i d'endomorphismes avec les mêmes propriétés que S et de rangs strictement décroissants tant que le rang était strictement positif, en prenant à chaque fois un nouveau vecteur w_i adapté.

Question 21 : On décomposait T en T-S+S, avec T-S somme de projecteurs orthogonaux d'après la question 13, et S somme de projecteurs orthogonaux d'après la question 20. L'implication était simplement un rappel du résultat de la question 6. Cette question était accessible sans avoir traité les questions les plus dures du sujet.