1.2.C - MATHEMATIQUES 1 - filière PSI

I) <u>REMARQUES GENERALES</u>

Le sujet permet d'établir en dimensions 1 et 2 l'inégalité intégrale de Prékopa et Leindler, avec applications aux fonctions log-concaves. Le cadre est restreint aux fonctions continues sur ou ^{2} La fin du problème élabore un lien avec la notion d'aire d'un ouvert borné plan, avec une extension de l'inégalité "P-L" dans la dernière question.

La résolution de ce problème repose en grande partie, et ce dès le début, sur la gestion d'inégalités (en particulier de convexité). Celle-ci a décontenancé beaucoup de candidats et pose une question assez inquiétante : avons-nous, nous les enseignants, encore les moyens d'initier nos élèves à ce qui est une pratique incontournable du calcul scientifique ?

Autre points visiblement mal assimilés : la notion de C^1-difféomorphisme, la convergence en d'une intégrale généralisée (qui entraine pour la majorité *lim f(x) = 0*), l'utilisation hors de tout contexte préhibertien de l'intégralité de Cauchy-Schwarz, etc… La notion d'intégrale double pose également quelques difficultés.

Pour conclure, le sujet intéressant en lui-même, est apparu trop technique pour bon nombre de candidats.

II) <u>REMARQUES PARTICULIERES</u>

Question 1 : Si la première partie de cette question est fréquemment correctement traitée, il n'en est pas de même de la seconde, où l'on voit apparaitre des fonctions de 2 variables, ou "ln est concave donc *ln (a+b) ln(a)+ln(b)*".

Question 2 : Peu de candidats traitent correctement cette question, mais ceux-ci le font avec des méthodes variées. L'erreur la plus fréquente est l'utilisation malencontreuse de la formule du binôme de Newton. Il faut lire le texte et faire la différence entre une puissance entière et une puissance *]0,1[!*

Question 3 : Cette question, pourtant assez simple au vu de l'indication fournie, a été traitée avec des fortunes diverses. Tout revenait à voir l'application *t u(t)* comme une réciproque dans C^1-difféomorphisme. Hélas, beaucoup de candidats utilisent mal le "théorème de la bijonction", confondant notamment existence et unicité.

Question 4 : La notion de difféomorphisme est mal connue (cf. ci-dessus). Par contre le *calcul* de *u'(t)* et de *v'(t)* a été fréquemment correctement exécuté.

Question 5 : On revient à la critique faites en Q3 et Q 4. Peut-être la locution "changement de variable" donnée dans le texte était-elle insuffisamment précise. Cependant un nombre non négligeable de candidats parviennent à mettre en place ce changement de variable. Par contre très peu ont su ensuite l'utiliser pour démontrer l'inégalité"*P-L*". On voit apparaitre parfois des intégrales doubles (?) et assez souvent l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui semble être une roue de secours (ceci se reproduit d'ailleurs dans les questions 9, 12 et 13).

Question 6 : Question souvent abordée, parfois avec succès. Cependant certains candidats ne s'aperçoivent pas que " est concave" n'est vrai que sur un intervalle restreint, ou ceux-ci ne considèrent que le cas *xy 0*

Question 7 et question 8 : Ces deux questions "calculatoires" ne nécessitaient pas d'initiative particulière. Une proportion non négligeable de candidats a traité l'une ou l'autre, rarement les deux. Ils y ont visiblement perdu du temps. Reconnaissons que les notations étaient assez lourdes.

Une gestion douteuse des inégalités apparait dans de nombreuses copies.

Question 9 : Cette question est peu abordée. Quelques rares candidats l'ont traitée correctement. Un nombre plus significatif suggère de faire tendre vers 0 dans l'inégalité de Q8.

Question 10 : Cette question (dont le résultat est graphiquement évident) a été souvent abordée, mais certains se perdent dans l'étude d'une multitude de cas.

Question 11 : Le théorème de convergence dominée semble en général à peu près connu mais la majorité des candidats se contentent de l'appliquer aux fonctions caractèristiques de Q10. Cela signifie une mauvaise lecture de l'énoncé, qui ici, n'avait pas lieu d'être. Toute la partie I est destinée à cet aboutissement. Cela n'aurait aucun intérêt s'il ne concernait que les fonctions de Q10 !

Question 12 : Question souvent abordée mais avec peu de succès, car la plupart des candidats ne songent pas à diagonaliser l'endomorphisme symétrique de S, ce qui rendait les calculs bien plus simples que dans le cadre d'une application directe de la définition d'une fonction log-concave.

Question 13 : On observe quelques bonnes démonstrations complètes et un certain nombre de candidats pensent à appliquer l'inégalité "*P-L*" sur l'intégrale intérieur. On voit cependant à de trop nombreuses reprises une énormité : "en multipliant entre elles les inégalités *P-L* sur on obtient …", ce qui dénote une grave incompréhension de la notion d'intégrale double.

Question 14 : On observe des tentatives assez nombreuses, mais beaucoup de candidats oublient la référence à " ", ce qui rend le raisonnement bancal. Voir aussi Q15

Question 15 : Les questions Q14 et Q15 introduisent pour préparer les questions Q16 et Q17 une notion abstraite d'aire probablement hors de portée de la plupart des élèves.

Devant cette extrême sophistication, le jury n'a pu se montrer que très bienveillant dans sa notation.

Question 16 : Que la somme de deux bornés soit bornée est une chose bien naturelle, mais ce ne l'est plus pour la somme de deux ouverts, ce qui réclame une véritable démonstration (et non : " l'union de deux ouverts est un ouvert donc la somme de deux ouverts également ").

La deuxième partie de la question est peu abordée et jamais correctement.

Question 17 : Cette question n'a presque jamais été traitée.

III) <u>QUELQUES CONSTATS ET CONSEILS AUX CANDIDATS</u>

Les résultats obtenus sont dans l'ensemble franchement décevants, même si l'on trouve quelques bonnes copies et quelques idées originales. Comme déjà souligné dans les remarques générales, ceci semble en bonne partie tenir à de sérieuses difficultés de manipulations des inégalités, qu'elles soient numériques et de type convexité ou tenant à des intégrales.

Quelques conseils :

- D'abord, lire attentivement le texte de l'énoncé d'une question. Il n'est pas normal de se lancer en Q2 dans une récurrence ou une formule du binôme alors que le texte indique un paramètre réel compris strictement Entre 0 et 1 ! On retrouve ce genre de défaut dans la suite, mais vu dans la Q2, l'effet est spectaculaire : *soyez beaucoup plus attentifs à appréhender le contexte d'une question ou d'un groupe de questions.*
- Rechercher des méthodes simples. Il est par exemple surprenant que peu de candidats aient songé à diagonaliser l'endomorphisme sysmétrique S dans la Q12 alors que la plupart connaissaient le théorème "spectral" .
- Rester cohérent : des intégrales simples qui se transforment en intégrales doubles (ou inversement), c'est plutôt surprenant.
- Il n'est pas interdit de formuler une approche intuitive raisonnable qu'on ne saura pas mener à terme. Par exemple, dans la Q9, indiquer : j'envisage de faire tendre vers 0 dans l'inégalité de Q8, ou, dans Q14 et Q15, signaler que l'on pense à la définition d'une aire de surface plane (ce qui rendait immédiats les résultats demandés pour le pavé et le disque).

Bonne chance à tous les futurs candidats, et surtout, soyez *très attentifs aux détails des énoncés*.