1.2.C - MATHEMATIQUES 1 - filière PSI

I) <u>REMARQUES GENERALES</u>

Le sujet concerne la démonstration d'une version allégée du "théorème centrale-limite" bien connu et utilisé en probabilités.

Les techniques utilisées sont pour l'essentiel les intégrales généralisées, les divers théorèmes de domination, et les majorations en P P_{∞} .

Dans les parties I et II sont étudiées des propriétés des convolutions d'applications appartenant aux deux ensembles suivants : (remarquons tout de suite que $P(\mathbb{R})$ n'est pas un espace vectoriel , ce qui semblait aller de soi pour la grande majorité des candidats, même si ce constat n'avait pas une importance décisive) :

- $C_0(\mathbb{R}) = \{u \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \text{ , } \lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} u(x)\}$
- $P(\mathbb{R})$, espace des fonctions continues bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ existe et est égale à 1

Les parties 3 et 4 établissent progressivement le théorème "centrale-limite" dans le cadre dessiné ci-dessus, en utilisant des opérateurs de convolution appliqués à des suites particulières de fonctions de $P(\mathbb{R})$ convergeant faiblement vers une application de $P(\mathbb{R})$.

Une des difficultés éprouvée par les candidats est l'exploitation mal assumée de quelques résultats intermédiaires "admis" dans le texte du problème. Ceux-ci étaient cependant compréhensibles.

Nous soulignerons surtout la très mauvaise interprétation par un grand nombre de candidats de la notion de convergence d'une intégrale à l'infini, qui conduit à un excès de mauvaises copies.

Notons enfin qu'il y a de bonnes copies en nombre significatif mais très peu de "très bonnes" copies.

II) <u>REMARQUES PARTICULIERES</u>

Q1 : cette question est bien traitée par une forte minorité des candidats mais hélas abordée de façon désastreuse par beaucoup. Les théorèmes de domination sont, en gros, connus, mais il n'en est pas de même de la notion de convergence d'une intégrale à l'infini (cf remarques générales). Nous avons droit à un florilège d'absurdités telles que celles-ci :

- une fonction tendant vers 0 en $+\infty$ est intégrable
- le produit de 2 fonctions intégrables est intégrable
- une fonction constante (non nulle) est intégrable sur $\mathbb{R}$

Q2 : voir Q1; curieusement, certains candidats traitent correctement la domination dans cette question, sans s'apercevoir que celle-ci est maltraitée dans Q1.

Q3 : noter que $P(\mathbb{R})$ *n'est pas inclus* dans $C_0(\mathbb{R})$ (et n'est pas un espace vectoriel, ce qui a été signalé au début).

Nombre de candidats traitent longuement cette question portant sur le théorème de Fubini sans arriver à l'essentiel : toujours et encore le problème de la bonne compréhension de la notion de convergence d'une intégrale à l'infini.

Q4 et Q5 sont dans l'ensemble traitées correctement.

Q6 : Beaucoup de candidats utilisent la bonne démarche. Signalons toutefois l'emploi trop fréquent de la curieuse inégalité $|a-b| \leq |a|-|b|$.

Q7 : la récurrence est correctement présentée par la majorité des candidats.

Q8 : l'intégrale de Gauss (qui ne figure pas au programme) n'est pas rappelée mais souvent évoquée par les candidats. On s'en passait sans problème à l'aide d'un changement de variable linéaire.

L'espérance et la variance, qui suivaient, sont souvent bien calculées. Toutefois une "curiosité" revient trop fréquemment : $\int_{\mathbb{R}} x^2 g_h(x)dx = 0$; ce qui est surprenant dans le cas d'une fonction strictement positive. On peu de bon sens SVP !

Q9 : cette question est correctement traitée dans l'ensemble. Quelques candidats ne comprennent pas la notation.

Q10 : question souvent abordée avec succès.

Q11 : cette question délicate est fréquemment abordée, la plupart du temps sans succès. Il est cependant agréable de constater que de bons candidats la traitent globalement ou partiellement par des méthodes originales, sans suivre les indications de l'énoncé.

Q12 : la domination est fréquemment utilisée mais la majorité des candidats se contente d'une domination sur $\mathbb{R}$ (inexacte), alors qu'il est essentiel d'introduire une domination *locale* "sur les segments".

Q13 : il suffit de faire référence à Q2, ce qu'a bien vu une partie significative des candidats.

Q14 : assez fréquemment abordée, mais la méthode utilisée est généralement incorrecte. Dire "par interversion des limites" n'est pas une démonstration.

Les questions 15,16,18,19 sont très peu abordées.

Un certain nombre de candidats tentent de "grapiller" sur la première partie de Q17, mais on constate malheureusement une méconnaissance des développements limités d'ordre 2.

III) <u>CONSEILS AUX CANDIDATS</u>

L'ensemble des résultats obtenus est un peu décevant mais semble correctement échelonné.

Quelques conseils :

- Ne pas analyser et résoudre les questions posées une à une mais par blocs lorsqu'elles sont très comparables : c'était important au début du problème (voir en particulier la remarque faite sur Q2).
- Ne pas hésiter à écrire en détail l'énoncé d'un théorème, ce qui guide la démarche à adopter.
- Dans une démonstration, toujours citer avec précision la référence (n° de la question) d'un résultat antérieur que vous utilisez, *que celui-ci ait été démontré ou non.*
- Rappelons une fois encore qu'il ne sert à rien de paraphraser l'énoncé, ou de donner un résultat "sec". De même, éviter les groupes nominaux du genre "par récurrence évidente" (cf Q10) ou "il est facile de montrer que", ou encore "une étude de fonction classique expliquerait tout ceci" (cf Q8).
- Ne pas chercher à aller le plus loin possible mais essayer plutôt de vous faire comprendre (le grapillage n'est pas interdit mais n'est pas toujours rentable).

En espérant que ces quelques conseils seront utiles aux futurs candidats.