

1.2 C - MATHÉMATIQUES I - filière PSI

I) REMARQUES GÉNÉRALES

Le problème portait sur l'étude de la limite d'une suite de matrices. Le sujet était de longueur et de difficulté moyennes.

Les sujets abordés faisaient intervenir le programme d'algèbre mais aussi de la topologie.

La présentation des copies est, en général, correcte.

Seules les meilleures copies abordent avec succès presque toutes les questions.

II) REMARQUES PARTICULIÈRES

Partie I

Q 1. Des manipulations illicites des sommes doubles.

Les << passages aux max >> sont souvent mal justifiés ; par exemple, majorer $\max_i \sum_j M(i,j) \sum_l N(l,j)$ par $\|M\| \|N\|$ n'est pas faux mais mérite une explication.

Certaines copies invoquent l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Q 2. Question assez bien traitée dans un grand nombre de copies mais parfois en utilisant des détours inutiles.

Q 3. Bien en général mais certains candidats utilisent la condition $X_\infty = X_\infty P$ comme une condition suffisante de positivité alors que l'énoncé - théorème 1 - précise bien qu'il s'agit d'une condition nécessaire. Rappelons à ce propos qu'il faut lire un énoncé avec beaucoup d'attention avant d'aborder la résolution des questions.

Partie II

Q 4. Trop peu de candidats utilisent ou redémontrent le fait que $\text{rg}(a \circ b) \leq \min(\text{rg}a, \text{rg}b)$.

Q 5. Exercice classique de première année malheureusement pas toujours bien traité.

Q 6. Cette question a souvent été traitée avec une confusion indiquant une mauvaise compréhension de la notion basique de matrice d'un endomorphisme dans une base : matrices <<équivalentes >> au lieu de <<semblables >>, matrice de a dans une base mal précisée, etc.

L'inversibilité de B n'est correctement justifiée que dans de rares copies.

Q 7. Question assez bien traitée mais on trouve des erreurs graves comme :

$$A \text{ est inversible ou encore } \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q 8. Comme $aa' = a'a$, on pouvait bien entendu, pour justifier les stabilités, citer directement le résultat du cours. A noter que la définition même de la stabilité n'est pas toujours connue.

En ce qui concerne l'existence de D , le fait que le bloc inférieur droit est nul n'est pas toujours démontré.

Q 9. Les affirmations $\text{Ker}(aa') = \text{Ker}(a)$ et $\text{Im}(aa') = \text{Im}(a)$ doivent être correctement justifiées.

Q 10. Les candidats ayant répondu correctement aux questions précédentes n'ont pas eu de mal à traiter celle-ci.

Il était aussi possible de la traiter directement (en n'utilisant que la définition de la notion de pseudo-inverse et un calcul algébrique), ce qui a été remarqué par quelques candidats.

Partie III

Q 11. $a(x) \in \mathbf{R}^n$ et $a(y) \in \mathbf{R}^n$ devaient évidemment être indiqués explicitement pour que le calcul soit considéré comme rigoureux.

Q 12. Difficile et peu traitée (il fallait penser à trigonaliser a_c).

Q 13. Moins difficile, car ne nécessitant pas d'astuce particulière, mais délicate, car il fallait raisonner de manière précise. Cette question a été souvent mal traitée.

Q 14. Assez bien traitée mais on voit tout de même parfois des fractions de matrices ou des suites géométriques de matrices.

Q 15. Question très mal traitée. On pouvait, soit utiliser la question précédente et un calcul de matrices blocs, soit procéder par récurrence. Mais cette dernière méthode, la plus souvent utilisée, n'aboutit que dans de rares copies.

Q 16. Il fallait remarquer et bien justifier le fait que la suite $(I_n - P^k)A'$ est bornée.

Q 17. La positivité est souvent oubliée.

$(I_n - AA')A = 0$: de nombreux candidats ont repéré cette fraction de point facile à gagner.

Q 18. Résolue uniquement par quelques copies exceptionnelles.