- MATHEMATIQUES I - filière PSI

I) REMARQUES GENERALES

L'objectif du problème est l'étude de solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec conditions aux limites.

Dans la première partie, on donne une représentation intégrale d'une solution, et une condition nécessaire est obtenue pour avoir une solution non nulle. Dans la seconde partie, la fonction de Green G est introduite, et permet l'obtention de solutions 2 - périodiques.

Ce devoir d'analyse, de longueur raisonnable, ne présente pas de difficultés majeures ; il nécessite une bonne assimilation des techniques de base d'analyse réelle, ainsi que des connaissances portant sur la convergence uniforme et les séries de Fourier.

Il s'ensuit que toutes les questions ont été abordées avec plus ou moins de succès.

Nous avons constaté la présence d'excellentes copies, rédigées de manière claire et concise, côtoyant des devoirs d'une indigence surprenante à ce niveau.

Voici quelques points faibles constatés :

1) Lorsqu'un passage est illisible, le correcteur ne cherchera pas à deviner ce qu'il ne peut pas lire .

2) Des candidats confondent bavardage mathématique et démonstration ; il faut distinguer entre épreuve de communication et devoir de mathématiques.

3) Des calculs faux développés sur une à trois pages, alors que dans ce devoir, les calculs demandés sont tous très courts.

4) Enfin, les correcteurs chevronnés savent qu'une inégalité à démontrer reçoit presque toujours une réponse, laissant aux dits correcteurs le soin de démêler le vrai du faux ; un candidat n'a pas hésité à affirmer que : $11\frac{\sqrt{3}}{12} \leq \frac{1}{8}$, et ce type d'erreur est loin d'être isolé.

Certes, les correcteurs comprennent l'angoisse des candidats, et savent se montrer indulgents vis à vis de fautes vénielles, mais il est des erreurs difficilement excusables.

Cette épreuve a finalement permis de classer correctement les candidats.

Analysons maintenant les diverses questions du problème.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Première partie

La première question a été discriminante ; voici parmi les nombreuses erreurs, celles qui furent les principales :

- oubli du cas $\alpha = 0$,
- erreur de signe due au fait que l'on a pris $y'' + \alpha y = 0$ au lieu de : $-y'' + \alpha y = 0$,
- équation caractéristique fausse : $-r^2 + \alpha r = 0$,
- équation caractéristique juste mais racines fausses,
- $\sin\omega = 0$ entraîne $\omega = 0$ ou $\omega = 2k\pi$,

- $\mathrm{sh}\omega = 0$ entraîne $\omega = k\pi$.

Ensuite, certains candidats ont invoqué le théorème de Cauchy – Lipschitz, sans en donner l'énoncé, et concluaient, confondant conditions initiales et conditions aux limites à l'unicité de la solution, à savoir $y = 0$ puis trouvaient, dans le cas où $\alpha < 0$ une solution non nulle, sans être inquiétés par cette contradiction ; cela fait penser à cette boutade de Bertrand Russell : « les mathématiques sont une science où l'on ne sait jamais de quoi l'on parle ni si ce que l'on dit est vrai ».

Les questions 2 et 3 ont, dans l'ensemble, été bien traitées, à l'exception de ceux qui voulaient appliquer Cauchy – Lipschitz ou de ceux qui pensent que :

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) - f(a)$$

Quelques candidats ont compris que la question 1 s'appliquait à $(\Phi - \Phi_1)$ avec $\alpha = 0$.

La question 4 n'a pas présenté de difficultés. Inutile d'invoquer à nouveau Cauchy – Lipschitz qui ne permet pas de conclure.

Dans la question 5, l'implication « y vérifie (R) entraîne y vérifie (S_1) » a été généralement bien traitée, par contre la réciproque n'a pas été bien comprise. A nouveau, des candidats ont voulu appliquer Cauchy – Lipschitz.

La question 6, élémentaire, ne nécessitait que la connaissance du résultat : « une fonction définie sur un segment I de **R**, à valeurs dans **R**, continue sur I est bornée sur I et atteint ses bornes ».

Des candidats ont essayé d'utiliser le théorème de Rolle (écrit pour la circonstance Raule ou bien Rôle), alors que h n'était pas supposée dérivable.

La question 7 a été très sélective ; peu de candidats donnent une solution correcte. Le constat est simple : les manipulations d'inégalités sur **R** ne sont pas maîtrisées. Le nombre de majorations fausses et d'erreurs de calcul est impressionnant. Par contre, des candidats ont rédigé une solution courte et juste, ils ont été récompensés.

La dernière question de cette partie a été peu traitée ; elle pouvait être résolue en admettant l'inégalité obtenue à la question précédente, ce qui a été fait par quelques candidats.

Deuxième partie

La question 9 a été très sélective. Le calcul des coefficients de Fourier s'est révélé hors de portée pour un nombre important de candidats qui se sont laissés emporter dans un torrent de calculs et ont abouti à des résultats faux. A l'inverse, il est agréable de constater que des candidats sont capables de conduire correctement des calculs.

Signalons que quelques candidats ont trouvé que a_n est différent de zéro, alors que la fonction considérée est impaire.

Dans la question 10, le théorème de Dirichlet est généralement énoncé de manière correcte. Il reste encore des candidats ignorant les hypothèses exactes de ce théorème.

La question 11 n'a pas été bien comprise par un bon nombre de candidats. Il s'agit de montrer la convergence uniforme par rapport à un couple de variables alors que la question précédente donne la convergence uniforme pour x fixé, par rapport à $t \in$ **R.**

Certes, la majoration $| b_n | \leq \dfrac{2}{n^2\pi^2}$ est immédiate, indépendante de x et de t, mais on attend une justification précise.

La question 12 a été peu traitée et mal lue par un certain nombre de candidats, qui ont pensé qu'il faut montrer l'existence et l'unicité ; seule l'unicité est demandée. Les questions 2 et 4 permettent de conclure rapidement, et d'obtenir :

$$\forall\, x \in \mathbf{R},\ z(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t)dt$$

Avec persévérance, des candidats ont continué à invoquer Cauchy-Lipschitz.

Le développement de z en série de Fourier, demandé dans la question 13, s'obtient alors facilement, soit à l'aide des questions 11 et 12, soit en calculant correctement les coefficients de Fourier $b_n(z)$ en fonction de $b_n(f)$, puis en justifiant que l'on a une fonction de classe $\mathbf{C}^2$.

La question 14 a eu plus de succès, mais on retrouve les erreurs habituelles de calcul : une nouvelle formule a fait florès : $\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right) = (-1)^n$.

Les candidats étaient ensuite entièrement guidés pour trouver les coefficients de Fourier de z, ce qui a permis à quelques-uns de résoudre correctement la 15ème question.

Ensuite, certains candidats ont conclu hâtivement, que, s'il existe un entier p tel que $p^2\pi^2 = -a^2$, on aboutit à une impossibilité, sans se préoccuper de savoir si $b_p(f)$ est nul ou non nul ; cette étude incomplète a empêché la résolution générale des deux dernières questions, mais très peu de candidats en ont donné une solution satisfaisante.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Les conseils prodigués aux candidats sont énoncés dans les rapports antérieurs, mais vu leur importance, nous en rappelons trois :

1) Une connaissance parfaite des théorèmes du cours est indispensable. Il est clair que, si des candidats avaient énoncé in extenso le théorème de Cauchy-Lipschitz ils se seraient probablement rendus compte de la différence entre conditions initiales et conditions aux limites.

2) L'honnêteté intellectuelle est appréciée, et ne pénalise pas le candidat.

3) Une pratique régulière et intelligente du calcul réduit considérablement les risques d'erreur au moment des concours.