

1.2 – Epreuves écrites

1.2 C - MATHEMATIQUES I - filière PSI

La première partie du problème concernait l'étude de séries entières $\sum u_n x^n$ où $u_n = f(1) \cdot f(1/n)$, la fonction f étant au moins continue sur $[0,1]$. Naturellement le mot clé pour l'étude de ces séries est « critère de d'Alembert » et son usage était ici très efficace. Cet usage nécessite cependant certaines précautions, la principale étant de s'assurer que les coefficients de la série ne s'annulent pas.

C'est pour n'avoir pas pris cette précaution élémentaire que beaucoup de candidats se sont trompés dès la première question : dans le cas iii en effet les coefficients sont tous nuls à partir d'un certain rang et la série est un polynôme, le rayon est alors $+\infty$.

Même remarque pour la question I1b : si l'un des nombres $f(1/n)$ est nul alors le rayon est infini. Notons aussi que le rayon de convergence d'une série est un nombre ≥ 0 ; des valeurs absolues étaient donc nécessaires dans les réponses aux questions I1a et I2b. Si l'on pouvait sous-entendre que les réels correspondant étaient positifs, trouver un rayon égal à -1 laisse rêveur...

Le critère de d'Alembert permettait aussi de répondre élégamment à la question I2a). Sans cela, pour prouver la convergence de u_n vers 0 il fallait s'assurer de l'existence de $a \in [0,1]$ et de $N > 0$ tels que $|f(1/n)| \leq a, n \geq N$ pour conclure. Beaucoup de candidats se sont contentés d'affirmer que $|f(1/n)| < 1$ pour n assez grand, ce qui n'aboutit pas.

La question I3 a été correctement traitée par très peu de candidats. La plupart des copies se contentent d'invoquer un argument d'équivalence qui ne peut pas aboutir. Il fallait ici effectuer un développement limité à l'ordre 2 de f pour s'apercevoir que $\ln(v_n / v_{n-1}) = O(n^{-2})$. La question I4a n'a pas été mieux traitée ; la dépendance de la réponse aux valeurs de β a échappé à la plupart des candidats.

Si l'on peut expliquer le peu de réponses à ces deux questions par le fait qu'elles étaient relativement délicates et demandaient de l'initiative, les correcteurs ne s'expliquent en revanche pas le peu de succès de la question IIIa. Il s'agissait en effet d'un calcul de développement limité extrêmement classique et la seule difficulté était, après avoir réduit au même dénominateur, de déterminer le bon ordre au numérateur. La plupart des candidats ici encore se sont limités à la notion d'équivalent et les ont additionnés sans vergogne.

Si le calcul de l'intégrale dans cette même question a en général été bien fait, le problème en 0 qui surgissait dans le calcul a été éludé.

La question IIIb concernait les séries de Fourier et plus précisément le théorème de Dirichlet qui a souvent été mal énoncé. Rappelons tout d'abord que la continuité par morceaux, et même la continuité tout court, n'est pas suffisante pour assurer la convergence simple de la série de Fourier. La bonne hypothèse est C^1 par morceaux, mais là, si la fonction n'est pas continue, ce qui d'ailleurs était le cas ici, il ne saurait y avoir de convergence uniforme. Notons enfin que le terme de « régularisée » utilisé par beaucoup n'est pas consacré et doit être défini.

Bien peu de candidats sont allés au delà de la question III1. Cette question a été en revanche largement abordée, mais malheureusement son traitement s'est résumé la plupart du temps à un verbiage indigeste et confus. Rappelons quelques principes pour répondre à ce genre de questions :

- Il faut tout d'abord justifier l'existence des intégrales considérées, et certains n'ont pas vu le problème en 0.
- Ensuite, il faut soit énoncer les théorèmes que l'on désire utiliser, soit clairement en faire apparaître les hypothèses. Inutile à ce niveau du problème de s'appesantir sur les hypothèses du type continuité des fonctions que l'on intègre qui étaient ici évidentes.
- Enfin, la clé de ce genre de preuve réside dans les propriétés de domination. Rappelons qu'il s'agit d'une

propriété globale. Le fait que $(1 - t/n)^n$ converge vers e^{-t} ne suffit certainement pas à cet effet par exemple.

Pour conclure, les correcteurs désirent dire leur déception au vu du faible niveau des copies sur un sujet qui n'aurait pas du poser de problème à un élève ayant raisonnablement assimilé le programme d'analyse des classes préparatoires.