On observe un refus quasi-systématique d'utiliser les quantificateurs (ce qui rend bon nombre d'affirmations erronées ou incompréhensibles).

On remarque également un manque flagrant de rigueur. On confond très souvent inégalités strictes et larges, intervalles ouverts et fermés, etc... La gestion conjointe de l'ordre et de la fonction « valeur absolue » est désastreuse.

Même si le programme tolère l'absence de vérifications des hypothèses de régularité, dans l'emploi d'un changement de variable usuel dans une intégrale sur un segment, il est impératif que celui-ci apparaisse explicitement (une phrase de commentaire étant même vivement appréciée).

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe B.

1.4.1 Conclusion

Si de nombreuses copies trahissent une méconnaissance du cours, témoignent de la difficulté à élaborer ou rédiger des raisonnements structurés, de mener à bien des calculs classiques, un nombre certain de candidats parviennent toutefois à tirer leur épingle du jeu, en exploitant habilement les différentes questions du problème et leur variété.
En résumé, pour les prochaines années, le jury attend surtout des efforts de la part des candidats pour que leurs copies soient lisibles et agréables à parcourir, pour améliorer la justesse des propos et la rigueur de leurs argumentations. Cela nécessitera inévitablement une bonne connaissance du cours, des techniques et compétences exigibles, dans le cadre des programmes.

1.5 Mathématiques 1 - filière PC

1.5.1 Présentation du sujet

Le sujet a pour thème des inégalités portant sur des fonctions réelles définies sur $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Certaines de ces inégalités sont bien connues : concavité logarithmique du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$, inégalité de Minkovski.

La partie **I**, proche du cours, est consacrée aux points suivants :

- équivalence entre les deux définitions de la positivité d'une matrice symétrique réelle (point de vue forme quadratique et point de vue spectral) ;
- convexité des ensembles $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$;
- racine carrée d'un élément de $S_n^{++}(\mathbb{R})$;
- inégalité de convexité de Jensen.

La partie **II** est élémentaire. Après avoir démontré que, pour $M \in S_n^+(\mathbb{R})$, on a $\dfrac{\mathrm{Tr}(M)}{n} \leq \sqrt[n]{\det(M)}$, on propose un raffinement de cette inégalité.

La partie **III**, plus délicate, établit l'inégalité de Minkovski (question 10) et la concavité logarithmique du déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ (questions 11 et 12).

Dans la partie **IV**, courte et facile, on majore le logarithme du déterminant de $A + tI_n$ à l'aide de la trace de A si $A \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Enfin, la partie **V** fait étudier, pour $\alpha \in \left]-\dfrac{1}{n}, +\infty\right[\setminus \{0\}$, $A \in S_n^{++}(R)$ et $M \in S_n^+(\mathbb{R})$, le comportement asymptotique de $\det(A + tM)^{-\alpha}$ lorsque le nombre réel t tend vers 0.

Une analyse détaillée des questions est présentée dans l'annexe C.

1.5.2 Commentaires généraux

Ce sujet demande une bonne maîtrise des matrices symétriques (notamment du théorème spectral) des fonctions de variable réelle (en particulier de la convexité), et des fonctions vectorielles.

Les questions sont de difficultés très variées. Certaines relèvent de la question de cours ou de l'application immédiate. D'autres demandent une bonne maîtrise des théorèmes, quelques-unes nécessitent une vraie prise d'initiative.

Cette diversité de niveaux a permis un classement efficace. Une proportion significative des candidats a démontré de vraies qualités mathématiques ; les meilleurs ont traité une grande partie de l'épreuve. À l'inverse, beaucoup de copies révèlent une très mauvaise connaissance du cours et de grosses lacunes techniques (dérivation, calcul matriciel) et/ou conceptuelles, très en deçà de ce qui est attendu au CCMP.

1.5.3 Conseils aux futurs candidats

Nous incitons les candidats à apprendre leur cours en profondeur, de manière à maîtriser les notions et les théorèmes du programme. Les énoncés doivent être précisément connus, leur champ d'application cerné. Nous conseillons également un entraînement intense au calcul.

Nous suggérons aux candidats de prendre le temps de lire soigneusement l'énoncé, préambule compris. Une lecture rigoureuse du sujet guide la réflexion, permet d'éviter des erreurs et des omissions. Nous leur conseillons également de prendre le temps de relire leur copie, de manière à éviter de laisser subsister dans leur travail des absurdités criantes (par exemple, de erreurs de typage, comme les confusions entre vecteurs et scalaires).

La qualité de la présentation est prise en compte dans l'évaluation. Les correcteurs déplorent un grand nombre de copies très négligées.

C Mathématiques 1 PC

Q1 - Pour la première implication, le caractère non nul d'un vecteur propre n'est pas toujours précisé. Pour la deuxième, la démarcation s'opère entre les candidats qui citent complètement le théorème spectral (en précisant le caractère orthogonal de la matrice de passage, ou le caractère orthonormé de la base propre) et les autres. Contrairement à ce que semblent croire certains candidats, la positivité de $< Ax, x >$ pour x vecteur propre n'entraîne pas directement la positivité pour tout vecteur x.

Q2 - Beaucoup de candidats omettent la vérification de la stabilité de $S_n(\mathbb{R})$ par combinaison convexe. Le caractère convexe de $S_n^+(\mathbb{R})$ est assez souvent correctement établi, celui de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ reçoit majoritairement un traitement trop peu soigneux.

On attendait des exemples précis pour justifier que $S_n^+(\mathbb{R})$ et $S_n^{++}(\mathbb{R})$ ne sont pas des sous-espaces vectoriels, le plus simple, convenant pour les deux ensembles, étant celui de la matrice $-I_n$. Le cas de $S_n^+(\mathbb{R})$ a rarement reçu une solution satisfaisante.

Q3 - Les candidats proposent en général une matrice solution obtenue en diagonalisant A ; mais beaucoup omettent de vérifier sa symétrie et son caractère défini positif. Le caractère symétrique repose de manière cruciale sur le caractère orthogonal de la matrice de passage.
Noter une matrice $D^{1/2}$ sans explication ne constitue pas un argument.

Q4 - Cette question, assez souvent abordée, s'est révélée très discriminante. Peu de candidats ont su correctement mener à bien la récurrence sur n, faute de tenir compte de la condition $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Q5 - Il y avait plusieurs arguments à donner :

- concavité de log sur $\mathbb{R}^{+*}$;
- expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres ;
- inégalité de Jensen, qui concluait la preuve dans le cas défini positif ;
- vérification directe dans le cas non défini.

Les premiers points ont souvent été bien traités. Toutefois, une minorité de candidats ne pense pas à utiliser la dérivée seconde pour étudier la convexité ; parmi eux, certains poursuivent des calculs qui n'aboutissent pas, et semblent croire que l'absence de conclusion va fourvoyer le correcteur. Le dernier point a rarement été évoqué.

Q6 - Beaucoup de copies donnent l'expression correcte de $\|M\|_2$. Les justifications sont cependant parfois incomplètes, voire absentes.

Q7 - L'inégalité découle de la question 6. La preuve n'est pas toujours complètement convaincante, notamment en ce qui concerne le lien entre $\max(x_1, \ldots, x_n)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_k)^2$.

Q8 - Cette question, conséquence classique de la coréduction de deux formes quadratiques, est difficile dans le cadre du programme actuel de la filière. Elle joue un rôle important dans la suite du sujet et aurait clairement mérité une indication. En l'état, elle n'a été traitée que par une poignée de candidats, parmi les meilleurs. À noter que les termes diagonaux de D ne sont pas les valeurs propres de B, la relation entre les deux matrices n'exprimant pas la similitude.

Q9 - À nouveau (question 5), une minorité non négligeable de candidats ne pense pas à utiliser la dérivée seconde et produisent des calculs non concluants. D'autres y pensent, mais produisent un calcul faux. La question est tout de même bien traitée dans beaucoup de copies.

Q10 - Cette question demandait un certain recul. Il fallait en effet utiliser les questions 8 et 9, ce qui n'était pas indiqué. Elle a été traitée par un certain nombre de bons candidats.

Q11 - La question demandait à nouveau du recul. Elle a été un peu plus réussie que la précédente. Le cas non défini demandait une vérification complémentaire simple, rarement vue.

Q12 - Beaucoup ont vu le « passage au logarithme ». Il fallait préciser que la fonction était bien définie (déterminant strictement positif) et conclure à la concavité, non à la convexité !

Q13 - La question a été assez souvent bien traitée par les candidats l'ayant abordée. Certaines copies aboutissent cependant à un résultat faux, faute de dextérité dans l'usage du polynôme caractéristique.

Q14 - La bonne définition de f sur $\mathbb{R}^+$ est le plus souvent absente. Les candidats ayant obtenu le résultat correct à la question précédente ont généralement réussi à conclure en employant l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$.

Q15 - Question souvent traitée quand elle est abordée, soit via le caractère polynomial du déterminant, soit à l'aide de la question 8.

Q16 - Cette question, assez délicate, a très rarement reçu une solution satisfaisante. Certains candidats connaissaient le caractère ouvert de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et l'ont correctement appliqué ; il était toutefois nécessaire, si l'on procédait ainsi, de vérifier ladite ouverture, qui n'est pas un résultat du programme. La question 8 donnait ici une approche plus directe.

Q17 - Le cas de $A = I_n$ est traité par certains étudiants, en lien avec la question 13. Le cas général, immédiat par factorisation à partir du précédent, a moins de succès.

Q18 - Question rarement traitée correctement. Dans quelques copies, la réponse est avancée sans aucune justification.

Q19 - Très peu de réponses correctes, en dépit de l'indication. Employer le développement limité de $\dfrac{1}{1+u}$ avec $u = A$ ne constitue pas une réponse correcte.

Q20 - La justification de la dérivabilité est rarement complète : la stricte positivité de la fonction sur l'intervalle considéré intervient et doit être mentionnée.

Q21 - Question non immédiate, car demandant quelques calculs. Venant très tard dans le problème, elle n'a quasiment jamais été traitée.

Q22 - Question rapide à traiter avec l'indication, mais venant très tard, qui n'a quasiment jamais été traitée.

Q23 - et **Q24 -** n'ont pratiquement pas reçu de réponse valable.

RETOUR