

## 1.2B – MATHEMATIQUES I – filière PC

### Présentation du sujet

Ce sujet aborde deux thématiques :

- la première (parties **A, B, C**), analytique, a pour but d'établir deux théorèmes taubériens ;
  - la seconde (partie **D**), probabiliste, porte sur la marche de Bernoulli symétrique sur  $\mathbb{Z}$ .
- Conformément à l'énoncé, on note  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite i.i.d. de variables de Rademacher et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

La variable aléatoire  $T$  désigne l'instant de premier retour à l'origine de la marche  $(S_n)_{n \geq 0}$ , ou  $+\infty$  si la marche  $(S_n)_{n \geq 0}$  ne revient jamais en 0.

Le but essentiel du problème est de montrer que  $T$  est presque sûrement finie et de déterminer un équivalent de  $P(T > n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Pour ce faire, on calcule la fonction génératrice de  $T$ . Les théorèmes taubériens établis dans les parties **A** à **C** conduisent à l'équivalent désiré.

Les dernières questions aboutissent au calcul de la loi de  $T$ . Combiné à la formule de Stirling et à la sommation des équivalents (hors-programme en filière PC), ce calcul donne une démonstration de l'équivalent de  $P(T > n)$  plus économique que celle proposée dans le sujet. C'est dans un contexte plus général que la machinerie taubérienne révèle vraiment sa puissance ; on trouvera un énoncé dans le livre de F. Spitzer, *Principles of Random Walk*, Springer.

### Commentaires généraux

Le sujet permettait d'effectuer un tour assez large dans les programmes d'analyse (suites et séries numériques, séries entières, intégration) et de probabilités. Il était de longueur raisonnable, a été entièrement traité dans les meilleures copies et, surtout, a permis un bon étalonnage des notes.

La rédaction de la partie **B** aurait bénéficié du vocabulaire des séries entières. L'énoncé contenait une erreur mathématique, sans incidence sur l'évaluation : l'égalité de Karamata admise dans la question **6** n'est pas inconditionnellement vraie<sup>1</sup>. Enfin, une coquille s'était glissée dans la définition de  $S_n$  au début de la partie **C** ; les correcteurs ont apprécié la situation avec générosité.

Les correcteurs ont été surpris par le grand nombre de copies très faibles. Plusieurs questions vraiment simples (1, 3, 5, 8, 9, 12) ont donné lieu à des résultats décevants. Une autre surprise est venue du manque de soin et de rigueur dans la quasi-totalité des questions probabilistes. Le calcul des probabilités est nouveau venu dans les CPGE scientifiques. Il est sans

---

<sup>1</sup> Il suffit par exemple de supposer les  $a_k$  positifs ou nuls pour que l'énoncé soit correct.

doute plus près de l'intuition que d'autres parties des Mathématiques. Il n'en reste pas moins que la rédaction doit y avoir la même précision qu'ailleurs et que de vagues appels à une modélisation ne sauraient tenir lieu d'arguments.

### **Conseils aux futurs candidats**

Comme d'habitude, ce sujet valorisait le travail en profondeur du cours (en particulier de probabilités) et de la technique de calcul (en particulier de l'analyse asymptotique). Les nombreuses erreurs observées dans les questions probabilistes dénotent un manque de réflexion étonnant (par exemple confusion entre égalité en loi et égalité, incompréhension de la notion d'indépendance). Beaucoup de candidats n'arrivent pas à mener à bien des calculs très simples, ce qui traduit une pratique insuffisante ; le sens de l'asymptotique, fondamental en Mathématiques, apparaît comme très faible dans de nombreuses copies. Nous incitons donc les candidats à apprendre leur cours de manière réfléchie et à s'entraîner intensivement au calcul.

On relève assez fréquemment des résultats manifestement absurdes (valeur négative d'une intégrale de fonction positive, résultat d'une intégration dépendant de la variable d'intégration, probabilités supérieures à 1), des calculs dépourvus de signification (par exemple, confusions entre variable muette et variable parlante) et des tentatives de bluffs qui préviennent le correcteur contre l'ensemble de la copie. Conseillons donc aux candidats de prendre le temps de comprendre le sens des questions et, surtout, d'exiger d'eux-mêmes la rigueur nécessaire pour produire un discours sensé !

La rédaction est systématiquement évaluée. Les questions faciles ne doivent pas être expédiées : des arguments et des calculs clairs convainquent rapidement les correcteurs de l'honnêteté et de la solidité mathématique du candidat. Beaucoup de candidats rédigent en empilant des formules, sans même déclarer les objets. Par ailleurs, comme indiqué plus haut, la rédaction des probabilités a des standards de rigueur analogues à ceux en vigueur dans d'autres branches des mathématiques.

Terminons en rappelant l'importance de la présentation. Les copies peu lisibles sont pénalisées. À l'inverse, une présentation soignée (écriture lisible, absence de ratures, résultats encadrés) dispose très favorablement le correcteur.

### **Analyse détaillée des questions**

Q1. Il s'agit d'une question de cours, consistant à rappeler le développement de  $(1+x)^\alpha$  et à détailler l'application à  $\alpha = -\frac{1}{2}$ . Le développement du binôme est le plus souvent connu, mais certaines copies confondent développement en série entière et développement limité, alors que d'autres perdent du temps à retrouver le développement via la méthode de l'équation différentielle. Par ailleurs, les transformations relatives à  $\alpha = -\frac{1}{2}$  sont assez souvent mal menées, avec quelques erreurs grossières (du type  $(2k)! = 2^k k!$ ).

Q2. Cette question, un peu déstabilisante, est très rarement bien traitée. Les correcteurs ont relevé de nombreuses tentatives de bluff effectuées par extrapolation du résultat à partir des questions suivantes. Comme indiqué plus haut, ce genre de tentative ne rapporte rien et provoque la défiance du correcteur.

Q3. L'intégrabilité est en général correctement traitée. Le nombre de candidats pensant au changement de variable est en revanche décevant. On lit beaucoup de calculs qui n'aboutissent pas.

Q4. Il suffit d'invoquer la linéarité de l'intégrale et de la somme. Beaucoup de copies présentent des justifications fausses, certaines fondées sur le fait que tout polynôme est un monôme, d'autres sur des manipulations non pertinentes de séries.

Q5. L'intégrabilité est assez généralement traitée. Le calcul l'est un peu moins et donne lieu à quelques réponses déconcertantes : 0, des nombres négatifs, voire des  $\infty$  ceci si  $t$  est dans  $]0,1]$ , cela sinon.

Q6. Plusieurs réponses sont possibles. Le meilleur argument est la nullité à partir d'un certain rang de la suite considérée ; la démonstration de la convergence absolue est également presque immédiate. Bon nombre de candidats se lancent dans une discussion sur la valeur de  $x$ , qui reste sans contenu faute d'une compréhension claire de la différence entre variable muette et variable parlante.

Q7. Une question de synthèse, très moyennement réussie. De nombreux candidats justifient mal ou pas le fait que la somme s'arrête à  $n$ . D'autres concluent à partir d'une somme infinie. La détermination d'un équivalent simple de  $\sqrt{1 - \exp(-1/n)}$ , qui demande une demi-ligne, est souvent l'occasion de calculs laborieux et pas toujours exacts.

Q8. La regrettable coquille dans la définition de  $S_n$  n'est pas vue par certains candidats. Les correcteurs ont noté la question avec indulgence.

Q9. Les résultats sont souvent vus, mais la rigueur des démonstrations n'est pas toujours là. En particulier, beaucoup d'encadrements faux, voire de relations fantaisistes sur les parties entières (par exemple  $\lfloor \gamma n \rfloor = \lfloor \gamma \rfloor n$ ).

Q10. La première étape consiste à déterminer les limites respectives du majorant et du minorant. On termine ensuite à coups de  $\varepsilon$ . Beaucoup de candidats manient sans aucune rigueur les équivalents et les limites.

Q11. L'idée essentielle (faire tendre  $\alpha$  et  $\beta$  vers 1) est souvent comprise. La mise en forme demande du soin et est rarement complètement satisfaisante. Une référence au théorème des gendarmes est ici tout à fait insuffisante.

Q12. Question assez bien traitée dans l'ensemble. On note cependant beaucoup d'incantations confuses, voire dépourvues de sens (loi sans mémoire) et quelques réponses délirantes (la probabilité d'une intersection est la somme des probabilités).

Q13. Une très bonne façon de répondre à cette question est de constater l'égalité en loi des vecteurs aléatoires

$$(S_{k+1} - S_k, \dots, S_n - S_k) \text{ et } (S_1, \dots, S_{n-k}).$$

Ce fait résultait de l'application de la fonction déterministe

$$(x_1, \dots, x_{n-k}) \mapsto (x_1, \dots, x_1 + \dots + x_{n-k})$$

à l'égalité en loi

$$(X_1, \dots, X_{n-k}) : (X_{k+1}, \dots, X_n).$$

Ce type de rédaction efficace devrait s'imposer peu à peu en CPGE.

L'indication proposée par l'énoncé, équivalente en substance à l'argument précédent, est très rarement comprise.

Q14. Beaucoup d'arguments très faux, fondés par exemple sur la supposée indépendance des  $S_k$  ! Cette faute révèle une incompréhension profonde de la notion d'indépendance.

Q15. Beaucoup de candidats affirment le caractère complet du système d'événements

$A_k^n, 0 \leq k \leq n$ , qui est effectivement le ressort essentiel. Mais peu prennent la peine d'écrire une courte justification.

Q16. Le produit de Cauchy est souvent vu. En revanche, peu de justifications par référence à un item précis du programme.

Q17. Beaucoup de candidats donnent la réponse exacte pour  $n$  impair, mais sans proposer d'argumentation. Le cas  $n$  pair, pourtant fort classique, a beaucoup moins de succès.

Q18. La question est traitée par ceux qui ont correctement déterminé  $P(S_{2p} = 0)$  dans la question précédente et vu le lien avec le résultat de la question 1.

Q19. Question de synthèse. Il est nécessaire de vérifier les hypothèses d'application des résultats des premières parties pour produire une réponse satisfaisante.

Q20-Q22. Ces questions ne sont pas particulièrement difficiles. Faute de temps, elles reçoivent un succès mitigé. Certains candidats peu à l'aise en probabilités ont su trouver le sang-froid nécessaire pour les aborder de manière significative et en ont été récompensés.