

## I) REMARQUES GÉNÉRALES

L'épreuve proposait une étude de la lemniscate de bernoulli, de la fonction sinus lemniscatique et sa formule d'addition. Cela était le prétexte pour utiliser plusieurs parties du programme d'analyse et de géométrie. Il était intéressant par ailleurs, de faire l'analogie entre les fonctions trigonométriques usuelles ou les fonctions hyperboliques et celles que le sujet proposait de construire, sans aller néanmoins jusqu'à les confondre (comme le font certains).

Le sujet largement à la portée des candidats semble néanmoins en avoir déconcerté un bon nombre. La première partie n'a pas été toujours traitée soigneusement. Dans la partie 2, les manipulations sur les intégrales et les séries mènent à de grandes différences de traitement. Dans les parties 3 et 4, on se limite souvent à n'aborder que quelques questions. On fonce vers q17 ou q 23 ou q 26 sans avoir traité le reste. On est frappé aussi, chez certains, par le manque de soin sur des techniques de base. Positivement, pour parler des trains qui arrivent à l'heure, il y en a. De belles copies et bon nombre de candidats qui semblent à l'aise et maîtrisent bien les notions du programme, les meilleurs faisant preuve de dynamisme et précision. Le sujet a permis un bon étallement des notes. Les questions les moins traitées étaient celles de la fin.

Sur la forme, on constate qu'il y a trop peu de copies soigneusement présentées. Il faut parfois beaucoup d'effort au lecteur pour arriver et à déchiffrer les mots illisibles et à en comprendre le sens, tant sur le plan linguistique que sur le plan mathématique.

Sur le fond, par rapport au contenu mathématique, on est surpris par les confusions de certains candidats sur les concepts mathématiques entre ce qui relève de l'algèbre ou de l'analytique. Par exemple, pour montrer que l'application  $g$  est injective, on « établit » que  $\ker(g) =$

Autre exemple avec une décomposition « innovante » en éléments simples rencontrée plusieurs fois, appliquée à une fonction qui n'est pas une fraction rationnelle : on tente ainsi de déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels pour tout  $t \in ]-1,1[$  on ait :  $\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Certains candidats commettent de grosses erreurs, que l'on ne devrait plus trouver à ce niveau. Une multitude de formules de non sens sont utilisées. La plus courante consiste à dériver une intégrale fonction de sa borne supérieure en dérivant la fonction intégrée. On voit là une tendance lourde de confusion entre primitives et intégrales dépendant d'un paramètre. Le résultat utile pour justifier la classe de  $F$  n'est pas bien ciblé en général. Dans un nombre non négligeable de copies on confond aussi les séries entières avec celles de fourier.

Par rapport au sujet lui-même, le fait que le problème débute par une question de géométrie semble effrayer les candidats vu la phobie répandue chez les élèves vis-à-vis de la géométrie et de la confusion entre ses aspects *perceptif* et *déductif* (à propos des symétries de la lemniscate ou de ses tangentes au point  $O$ ). Notons aussi que le fait que les questions soient assez décomposées et posées sous forme fermées, accentue la promptitude des candidats à faire des paraphrases et essayer de grappiller des points par-ci par-là en survolant le problème.

Un sujet qui *a priori* devait permettre d'être traité avec succès par un bon nombre de candidats, ce qui ne fut pas le cas dans l'ensemble. De nombreuses copies nous donnent l'impression que le candidat reste en dehors du sujet. Enfin, il ressort que des notions fondamentales d'analyse ne sont pas maîtrisées chez un trop grand nombre de candidats.

## II-REMARQUES PARTICULIERES :

passons au détail des questions :

**Q<sub>1</sub>** La grande majorité des candidats ont établi la formule demandée. En revanche le passage de  $\rho^2$  à  $\rho$  par passage à la racine carrée convenable a rencontré peu de succès. L'interprétation géométrique des propriétés de parité ou périodicité de la fonction  $\rho$  mène souvent à des confusions et est abordé sans aucune précision. Cela n'est pourtant guère délicat en revenant au point  $M(\theta)$  (de coordonnées polaires  $(\rho, \theta)$ ). on a souvent du mal à faire le

lien entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires; justification rare du fait que l'arc correspondant à  $x \geq 0$ ,  $y \leq 0$ ,  $\rho$  est positif. On trouve aussi souvent des formules trigonométriques erronées ou non simplifiées.

**Q<sub>2</sub>** Beaucoup trop de candidats calculent la dérivée de la fonction  $\rho$  pour des valeurs qui ne sont pas admissibles, et parfois avec des erreurs (par exemple :  $(\sqrt{\cos 2\theta})' = \frac{1}{2\sqrt{-2\sin 2\theta}}$  ou d'autres types d'erreur).

Certains parlent du noyau de  $g$ , ou veulent utiliser le théorème du rang pour établir la bijectivité, ou encore confondent injection et surjection. Suite à une erreur  $g'(\theta)$  est négatif, on affirme quand même que  $g$  est croissante. Enfin la référence au théorème des valeurs intermédiaires est rarement précisée.

**Q<sub>3</sub>** Question rarement bien abordée, qui donnait lieu à préciser la notion attendue de tangente. Elle fut évaluée avec indulgence pour ceux qui tentent quelque chose ou évoquent les problèmes qui se posent. Cela fut le cas pour ceux qui constatent que  $\rho$  s'annule en  $-\frac{\pi}{4}$  et que  $\rho'$  n'a pas de limite réelle en ce point ; ou encore en se

référant à l'équation cartésienne constatent que le gradient s'annule en  $(0,0)$  ; ou qui envisagent à bon escient une limite. Le plus souvent on cite les tangentes vues sur le dessin et très peu tentent une justification.

**Q<sub>4</sub>** L'équation paramétrique a été très peu tentée et encore plus rarement correctement. rare est l'utilisation de l'expression  $\text{Arccos}(\rho^2/2)$ , mais dans l'expression directe de  $x$  et  $y$  en fonction de  $\rho$ , oubli du fait que  $y$  change de signe. Et souvent, dans ce cas, même connaissant l'expression générale de  $s'(\rho)$ , des calculs fastidieux n'aboutissent pas; des tentatives d'utiliser la variable  $\theta$ , puis  $\rho$ , mais dérivée de fonctions composées mal effectuée.

**Q<sub>5</sub>** La convergence de l'intégrale est loin d'être bien justifiée, une question souvent abordée mais pas toujours avec le savoir faire nécessaire. Outre ceux qui ne voient pas le problème en 1, on veut souvent (à juste titre) proposer une comparaison à une fonction de riemann, mais avec alors des erreurs dans les inégalités, la recherche d'équivalents, ou par des changements de variables non maîtrisés, voire en proposant une fausse primitive (avec  $\text{Arcsin}(r^2)$  ou  $\text{Argsh}$ ). Dans l'utilisation du théorème sur l'équivalence, on oublie de dire qu'il s'agit de fonctions positives, ou on effectue un développement limité pas par rapport à la bonne variable ou l'on ne voit pas la fonction de référence.

**Q<sub>6</sub>** On propose souvent que  $\sigma$  est l'aire du domaine limitée par la courbe. La référence à la longueur ou même avec l'abscisse curviligne évoquée dans le texte est peu répandue.

**Q<sub>7</sub>** On affirme souvent sans aucun commentaire supplémentaire que «  $F$  est continue sur  $[0,1]$  puisque l'intégrale converge ». Combien de candidats ne savent pas interpréter  $F$  comme primitive de  $f$  et on alors beaucoup de mal à la dériver (le plus souvent  $F'(x) = f(x) - f(0)$ ). On voit aussi que chez de nombreux candidats, l'étude des intégrales à paramètre a obscurci la fondamentale étude de l'intégrale fonction de sa borne supérieure, ce qui est évidemment très fâcheux. Par suite, le traitement de la question va de « très bien » à « catastrophique » selon l'approche du candidat.

**Q<sub>8</sub>** On voit trop souvent des graphes incomplets ou incorrects : intervalle de définition, intervalle image, tangentes verticales absentes aux extrémités.

**Q<sub>9</sub>** On trouve évidemment fréquemment la bêtue classique : «  $F$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]-1,1[$  donc développable en série entière sur  $]-1,1[$  », ou le développement en série de  $F$  est un polynôme. On tente quelques fois de retrouver les coefficients du développement à partir d'une équation différentielle aboutissant souvent à un blocage ou à des erreurs multiples. Plus souvent, on pense bien à utiliser le développement en série entière de  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^4}}$ , mais soit on se trompe dans l'expression ou l'on s'empêtre dans le problème d'utiliser  $t$  ou  $t^4$ , ou on

oublie le signe « - » (développer  $(1+t)^a$  ou  $(1-t)^a$  est identique pour de nombreux candidats), ou encore on ne sait que faire avec l'intégrale ou la dérivée. Heureusement, on trouve de bonnes copies où la rédaction de cette question est parfaite et bien maîtrisée. Notons aussi que certains confondent les questions 9 et 10 mélangeant existence et

calcul du développement.

**Q<sub>10</sub>** En liaison avec la question précédente, on ne met pas toujours en évidence que la série entière considérée est lacunaire et  $a_p = 0$  si  $p$  n'est pas de la forme  $4n+1$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . On trouve aussi parfois des confusions parfois entre série entière et série de fourier et des tentatives d'utilisation du théorème de dirichlet; comme en **q<sub>9</sub>** erreurs multiples pour le développement en série entière de  $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$  ou pour l'intégrer ; oubli du facteur

$$\frac{1}{4n+1} \text{ dans } a_{4n} ; \text{ ou même l'horreur } \ll \int t^{4n} dt = \frac{x^{5n}}{5n} \gg.$$

**Q<sub>11</sub>** Certains ayant fait des erreurs de calcul précédemment veulent utiliser une série alternée. On pense en général à utiliser la formule de stirling mais le passage de  $n!$  à  $(2n)!$  pose souvent un problème. La conclusion n'est pas toujours clairement exprimée à mi-chemin entre convergence normale (notion qui est en général mal connue ou mal comprise) ou l'utilisation du théorème « radial ». La valeur de la somme des  $a_n$  est très rarement justifiée et on se limite souvent à dire simplement que  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sigma$  car  $F$  est continue sur  $[-1,1]$ .

**Q<sub>12</sub>** Question souvent bien traitée, exception faite des très mauvaises copies. Il manque parfois la stricte monotonie attendue, ou on tente de justifier que  $F$  est injective car son noyau est réduit à zéro ; plus souvent  $F$  est bijective d'après le graphe et l'utilisation précise du théorème des valeurs intermédiaires mal explicitée.

**Q<sub>13</sub>** L'expression de la dérivée sur  $]-\sigma, \sigma[$  est souvent correcte. En revanche, pour la classe  $C^1$  sur  $[-\sigma, \sigma]$ , on se limite souvent à remplacer en  $\pm \sigma$  et très peu comprennent que cela devait être justifier avec soin, grâce un résultat approprié sur le prolongement des fonctions de classe  $C^1$  sur un intervalle. On trouve des formes très variées de formules erronées de la dérivée de  $F^{-1}$  en  $x$  : notamment  $\frac{1}{F'(x)}$ , ou  $\frac{x}{F^2(x)}$ , ou aussi  $\frac{F^{-1}(x)}{F'(x)}$  et on oublie la plupart du temps de préciser pour quelles valeurs de  $x$ . On confond aussi parfois la composition et le produit de deux fonctions (pour  $F$  et  $F^{-1}$ ). l'imparité est parfois mal faite ou juste paraphrasée.

**Q<sub>14</sub>** Beaucoup de candidats affirment la conservation du caractère  $C^1$  par simple symétrie par rapport à la droite verticale d'équation  $x = \sigma$ . Très peu de candidats traitent la question correctement et calculent bien la dérivée de  $sl$  au moyen d'un bon découpage avec des segments bien précisés. Certains proposant néanmoins un graphe correct dans la question suivante en désaccord avec leur expression de la dérivée. Cela montre d'ailleurs plus généralement le décalage ou le manque de recul des candidats entre ce qu'ils écrivent et la signification des résultats obtenus. Cela est pourtant l'un des aspects de la démarche scientifique qui est évaluée au concours. A signaler essentiellement l'absence de justification de l'existence des dérivées en  $\sigma$  et  $-\sigma$

**Q<sub>15</sub>** Assez souvent traitée. La problématique du recollement n'est pas perçue surtout pour celui à l'ordre 1 ;  $sl'$  est toujours positive même si le graphe de  $sl$  est visiblement périodique; la convexité changeant plusieurs fois sur un intervalle de longueur d'une demie période; graphe construit à partir des fonction réciproque de  $\sin$  ou  $sh$

**Q<sub>16</sub>** Bon nombre de candidats ayant abordé cette question ont concentré leurs efforts sur l'équation. Beaucoup l'ont établi pas toujours correctement compte-tenu de leur mauvais calcul dans **q<sub>14</sub>**. On ne sait en général pas utiliser simplement l'équation pour justifier la classe  $C^2$  de  $sl$ .

**Q<sub>17</sub>** Souvent correctement traitée, même si l'on a pas tout fait ce qui précède. On oublie souvent de préciser que  $\mathbf{R}$  est intervalle.

**Q<sub>18</sub>** Trop de candidats simplifient le terme  $\frac{f'(x)}{|f'(x)|}$  sans aucune hypothèse au préalable. L'existence du réel  $b$  est souvent traitée sans étudier le cas  $f'(x) < 0$ , la fonction étant considérée comme toujours positive; formes variées de dérivées erronées de la fonction  $\varphi$ ; absence de justification de l'existence de  $b$ .

**Q<sub>19</sub>** Le lien entre les zéros de  $\varphi'$  et ceux de  $f'$  est mal explicité.

**Q<sub>20</sub>** Dans cette question, la principale difficulté rencontrée par les candidats fut l'existence de  $u_1$  et  $u_2$ . Les arguments évoqués sont bien souvent non rigoureux. On trouve surtout un raisonnement intuitif paraphrasant la question. L'existence de la borne inférieure est rarement faite correctement. On pense souvent que  $f'$  ne s'annulant pas, elle est donc monotone.

**Q<sub>21</sub>** Les hypothèses qui assurent l'existence de la borne inférieure ne sont pas naturelles pour beaucoup.

**Q<sub>22</sub>** Très rarement abordée et peu traitée. On se borne alors à donner quelques idées sur ce qu'il faudrait faire ou l'interprétation du résultat à obtenir.

**Q<sub>23</sub>** Une question simple *a priori* pour ceux ceux qui avaient obtenu l'expression de  $sl'$ , mais qui a donné lieu à quelques difficultés dans l'obtention de cette dernière. On voit souvent un calcul de fractions aboutissant à une identité à laquelle le candidat invite le correcteur à le croire sur parole.

**Q<sub>24</sub>** Trop de copies ont une dérivée de  $cl$  fausse.

**Q<sub>25</sub>** Très rarement abordée et quasiment jamais traitée.

**Q<sub>26</sub>** Beaucoup ont affirmé que  $G$  étant symétrique elle a les deux mêmes dérivées partielles (réfléchir avec  $G(x, y) = xy$  ou  $x^2 + y^2$ ). On n'échappait pas à devoir faire le calcul, qui n'est d'ailleurs pas toujours correctement abordé. Calcul erroné de la différentielle  $dG$  le long de la droite  $x + y = a$ ; la preuve correcte est très rare.

**Q<sub>27</sub>** Si la question est abordée, seule l'expression de  $sl(x+y)$  est donnée par quelques candidats qui obtiennent alors la formule d'addition en utilisant les données précédentes.

**Q<sub>28</sub>** très rarement traitée.

### **III- CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS :**

1) Bien soigner son travail est une qualité fondamentale. La lecture de la copie et l'identification des réponses aux questions ne devraient pas être un obstacle pour évaluer votre production. Cela passe aussi évidemment par un équipement adapté pour écrire et présenter le travail (stylo, règle, etc.)

2) Essayer de saisir ce qui mis en jeu dans une question posée. Si le but du rédacteur est de guider le candidat en décomposant les questions posées, une réponse correcte à une question fermée, doit éviter à tout prix d'en paraphraser le contenu.

3) Apprendre son cours et l'avoir bien travaillé est un atout essentiel. Il faut cependant se poser la question à chaque instant : est-ce que telle ou telle formule a un sens ? Il faut considérer des cas simples pour vérifier si elle est valide ou pas et non pas l'appliquer mécaniquement. Le raisonnement accompagne toujours les différentes étapes du calcul. Un théorème donne des conditions suffisantes (hypothèses à vérifier) pour prouver un énoncé donné, ceci ne veut pas dire que pour prouver cet énoncé on doit nécessairement utiliser le théorème en question.

4) Enfin, faire preuve de dynamisme et d'une volonté de bien faire, en montrant ses qualités scientifiques en particulier dans la précision et l'argumentation tout au long de sa rédaction.