1.2 B – MATHEMATIQUES I – filière PC

I) REMARQUES GÉNÉRALES

Le sujet portait sur une inégalité importante en analyse, l'inégalité de Prekopa et Leindler, qui peut être vue comme une inégalité inverse de l'inégalité de Hölder. La partie III en présentait une application géométrique importante, l'inégalité de Brünn-Minkowski.

La première partie formait la part essentielle du problème et conduisait à une démonstration de l'inégalité de Prekopa et Leindler dans le cas unidimensionnel. Les questions 1) à 5) consistaient en la preuve de l'inégalité dans le cas restreint des fonctions continues strictement positives. La fin de la partie I amenait au résultat général par un procédé d'approximation. Cette première partie passait par la manipulation des inégalités de convexité et des théorèmes fondamentaux de l'intégration.

Le but des parties II et III était de donner une versions dans $\mathbf{R}^2$ de l'inégalité de Prekopa et Leindler et de démontrer une version de l'inégalité de Brünn-Minkowski. Les dernières questions demandaient de l'autonomie et une bonne compréhension de l'organisation du problème et de ses objectifs.

Dans l'ensemble, le bilan est assez décevant. La fin du problème et les dernières questions étaient certes assez délicats mais il est plus étonnant de voir que les premières questions sur des questions classiques d'analyse ne sont pas toujours bien traitées. Les candidats ont parfois montré des lacunes importantes sur des points élémentaires d'analyse. Ils n'ont d'autre part pas su prendre du recul sur le sujet, en comprendre la structure et ont éprouvé des difficultés dans l'assimilation des résultats précédents.

II) REMARQUES PARTICULIÈRES

Question 1 : En général traitée correctement

Question 2 : Globalement la question 2 a dérouté les candidats. Ils tentent quelquefois d'utiliser la première question sans succès, et très peu prennent l'initiative d'utiliser une fonction auxiliaire (plusieurs solutions courtes étaient possibles). Cette question a été la source d'une large variété d'erreurs. On a vu par exemple un grand nombre de copies appliquant l'inégalité du binôme pour un réel λ dans] 0; 1[, ou tenter une récurrence sur λ! D'autres ont utilisé des inégalités, certes pratiques, mais malheureusement grossièrement fausses : par exemple $(a+b)^{\lambda} > a^{\lambda} + b^{\lambda}$ pour $0 < \lambda < 1$, ou $\ln(a + b) < \ln(a) + \ln(b)$; $2^x < 2$ pour $x < 1$.

Question 3 : Cette question a souvent été partiellement traitée. En revanche, les candidats ne donnent pas toujours les arguments complets pour bien conclure : fonction continue strictement croissante sur **R** et usages de ses limites à l'infini.

Question 4 : La dérivée de u, est souvent obtenue, quelquefois de façon incorrecte (certains faisant intervenir la limite de f en $-\infty$, mais la justification de la classe C1 est beaucoup plus rare.

Question 5 : Les candidats ont souvent été maladroits pour démontrer que w (] 0; 1[) = R. Cela démontre clairement que l'utilisation du "tableau de variations" n'est pas toujours assimilée pour ce genre de problématique. Le changement de variables est souvent faux (soit les bornes d'intégration sont incorrectes, soit l'expression de dt en fonction de dw est fausse). Trop de copies présentent des inégalités sans aucune justification et mystérieuses. Une confusion très fâcheuse revient dans de nombreuses copies: certains candidats considèrent u, v ou w comme des applications linéaires et tentent d'utiliser les conditions sur la dimension du noyau et de l'image pour démontrer l'injectivité, ce qui ici n'a bien sûr aucun sens.

Question 6 : Elle est souvent abordée en utilisant la deuxième inégalité de la question 1 (même si certains ne réalisent pas que la question 1 était valable pour des réels positifs), ou par explication directe. Le jury note toutefois une erreur fréquente qui consiste à affirmer qu'est concave, puis à utiliser la première inégalité de la question 1.

Question 7 : Il fallait clairement préciser deux cas pour ces inégalités. Trop peu de copies ont clairement précisé dans le cas $|z| \geq M$ que le passage au carré dans l'inégalité $z - M \leq \lambda x$ était correcte.

Question 8 : Question réussie par les candidats appliquant correctement les inégalités dont celles de Question 2.

Question 9 : Il s'agissait de faire tendre epsilon vers 0 mais on trouve très rarement des justifications complètes.

Question 10 : Il était conseillé de faire un dessin pour mettre en évidence les différents cas à traiter ce que font très bien quelques candidats. On ne gagnait rien à expliciter les fonctions, et certains s'y perdent. Quelques uns se lancent dans un raisonnement par récurrence qui n'a aucune chance d'aboutir.

Question 11 : L'introduction d'une troncature n'a pas été vue et donc le lien avec la question 9 non plus. Bon nombre de candidats énoncent le théorème de convergence dominée et tentent de l'appliquer à des fonctions inadaptées (à χ_n par exemple).

Question 12 : Question facile dont l'analogie avec la question 6 n'a pas échappé aux candidats, mais avec des erreurs très fâcheuses chez certains qui écrivent par exemple des carrés de vecteurs, ou utilisent une supposée linéarité de la norme N.

Question 13 : Il s'agissait d'appliquer deux fois l'inégalité "P.L" pour les intégrales simples. Cette question difficile n'a été que très rarement complètement comprise (certains voient qu'il faut appliquer deux fois "P.L", mais passent à côté d'une partie du raisonnement).

Question 14 : L'énoncé et la vérification des hypothèses qui assurent l'existence d'une borne supérieure sont trop rarement bien écrits. Quelques-uns veulent prendre de la hauteur, affirmant par exemple que C(A) est compact ou d'autres affirmations (inexactes) du même ordre. La subtile définition de V (A) a échappé à la plupart des candidats, et la fin du problème a été réellement abordée que dans peu de copies.

Question 15 : L'indication du texte n'est que très rarement mise en œuvre, au mieux les copies se réfèrent à l'aire du rectangle.

Question 16 : Quelques candidats justifient correctement le caractère borné et plus rarement ouvert. La fin est rarissime.

Question 17 : Exceptionnellement abordée, et quelques rares et bonnes copies envisagent le raisonnement pour la généralisation.

III) <u>CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS</u>

Nous ne pouvons que conseiller aux futurs candidats de chercher à répondre aux questions le plus précisément possible et avec des arguments simples et explicites. Être déjà convaincu soi-même de ce que l'on dit restant un bon critère de rédaction. La volonté légitime de parvenir au résultat ne doit pas faire perdre au candidat le sens critique indispensable vis-à-vis des arguments qu'il avance.