MATHÉMATIQUES

1.2 - Épreuves écrites

1.2 B - MATH I - filière PC

I) <u>REMARQUES GENERALES</u>

L'épreuve de cette année utilisait à la fois l'algèbre et l'analyse pour établir une inégalité générale sur les déterminants de Vandermonde. Les différentes questions présentaient une certaine indépendance, et portaient sur une assez vaste partie du programme, permettant à un candidat normalement préparé d'obtenir un résultat au moins moyen.

Le barème, assez large, a permis de noter de 0 à 20, avec une moyenne proche de 8 ; ce résultat, en légère baisse par rapport à l'an dernier, s'explique par un nombre plus important de candidats faibles, n'obtenant pas plus de 4 sur 20, soit la note attribuée à la 1ère question. Fort heureusement, on trouve à côté de cela la proportion habituelle d'excellentes copies qui ne sont que très peu concernées par les remarques qui suivent.

<u>II) REMARQUES PARTICULIERES</u>

1°) a) Déjà des erreurs dans le calcul de l'exposant de λ pour l'expression de ν (λX) dans quelques rares copies.

b) La continuité de ν est souvent mal justifiée : certains reviennent à la définition, et commettent des abus dans les majorations ; d'autres se contentent d'affirmations vagues du style : « Le déterminant est une fonction continue » sans qu'on sache quelle est la norme choisie ni la définition générale d'un déterminant. Rappelons aussi que la continuité partielle n'entraîne pas forcément la continuité au sens de la norme en général.

La notion de compact est souvent ignorée ; certains se contentent du caractère fermé de S. De plus, il faut savoir que l'espace est de dimension finie pour identifier les compacts avec les parties fermées bornées, ce qui n'est pas souvent précisé.

c) Ne pouvait être traité que si a) et b) étaient corrects.

2°) a) Quoique très simple à trouver, la valeur de ρ est parfois fausse (avec des valeurs 1. ou $\sqrt{2}$). Si le vecteur X_1 est souvent obtenu, son interprétation et ses propriétés sont mal étudiées : certains recherchent les vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et non $\mathbb{C}^2$. Très rares sont les copies où les propriétés de X_1 sont complètement établies ; l'étude de la relation $|z-z'| = |z|+|z'|$ est pourtant élémentaire dans $\mathbb{C}$ et tout le monde devrait savoir justifier que cela équivaut à $z' = \lambda z$ avec λ réel <0, si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

3°) a) La majorité des candidats ignore ou ne pense pas à utiliser les propriétés des fonctions convexes. L'inégalité générale de convexité est pourtant au programme de la classe de 1ère année, et l'inégalité entre moyennes géométrique et arithmétique doit être expliquée.

Faute d'une méthode adéquate, beaucoup entreprennent des calculs qui n'aboutissent pas même si parfois ils prétendent le contraire, et perdent un temps précieux.

b) Cette question élémentaire sur les complexes a comporté elle aussi de graves abus (dans le quart des copies les plus faibles) : on rencontre des écritures type : « $|x_1 - x_2|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 - 2|x_1 x_2|$ » dans $\mathbb{C}$. Un résultat obtenu ainsi ne peut être pris en considération.

d) Cette question un peu moins immédiate nécessitait d'avoir résolu le b) ; mais même dans ce cas, elle a été très rarement traitée, seulement dans les meilleures copies ; l'enchaînement pourtant naturel des inégalités n'a pas été aperçu.

4°) a) Le calcul du terme général du produit $\overline{V(\Omega)}\ \ V(\Omega)$ n’est pas toujours présenté correctement. On rencontre des abus de notations qui consistent à écrire un produit matriciel C = AB sous la forme :

$$\begin{matrix} & B \\ A & C \end{matrix}$$

Les candidats ne doivent pas employer des notations qui leur sont personnelles, et se conformer à la présentation usuelle prévue par le programme.

De même, pour représenter une matrice colonne, il convient d’écrire :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et non } X \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Lorsque le terme général du produit est écrit, rares sont ceux qui reconnaissent une progression géométrique et savent calculer sa somme. Les candidats doivent savoir justifier que la somme des racines n° complexes de 1 vaut 0.

Enfin, on rencontre des absurdités du type « $e^{ab} = e^a e^b ou \sum_1^n 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ » et il est souhaitable de ne pas utiliser le symbole complexe i comme indice, dans une sommation, lorsque cela prête à confusion.

4°) b) Même lorsque le a) est trouvé, cette question qui en est une application immédiate n’est pas toujours résolue ; certains écrivent : « Det n I = n Det I ».

5°) a) En général traitée avec parfois les abus signalés au 4°)a). La matrice M n’est pas orthogonale en général (certains l’ont cru).

b) Cette question un peu plus délicate a souvent été mal présentée faute d’une interprétation correcte de la projection ; il fallait en effet écrire une décomposition de $proj_{i-1}\ v_i$ sur $v_1, \dots, V_{i-1}$ pour expliquer l’égalité. On rencontre des abus du type «$proj_{i-1}\ v_i = \lambda V_{i-1}$ » . Il ne fallait pas se contenter d’affirmer vaguement : « le déterminant est une forme n. linéaire alternée » sans préciser les combinaisons de vecteurs qui intervenaient.

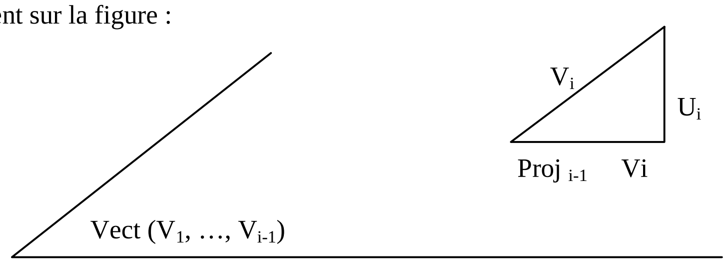
Il était aussi possible pour résoudre cette question de faire appel à une formule de changement de base pour les déterminants ; mais encore fallait-il préciser avec soin les bases introduites.

Les tentatives de raisonnement par récurrence sur n n’étaient pas valables.

c) L’inégalité $\|U_i\| \leq \|V_i\|$ n’est pas toujours justifiée (on rencontre même $\|V_i\| \leq \|U_i\|$) et le cas d’égalité n’est que très rarement étudié faute d’avoir écrit la relation de Pythagore :

$$\|V_i\|^2 = \|U_i\|^2 + \|\ proj_{i-1}\ V_i\|^2$$

Dans ce type de question, un schéma géométrique est souhaitable, même s’il reste formel et ne remplace pas le raisonnement ; il n’a été présenté que dans de très rares cas ; les propriétés des vecteurs apparaissent en effet clairement sur la figure :



6°) L’inégalité demandé est parfois établie en intervertissant les indices p et q (cela correspond à une transposition de V(X). Une telle interprétation pouvait être acceptée, puisqu’elle permet aussi de traiter la question, mais à condition de ne pas l’identifier avec celle de l’énoncé.

7°) Cette dernière question d'analyse a permis à ceux qui en ont eu le temps d'améliorer sensiblement leur note, car on pouvait la traiter en admettant les résultats des parties précédentes. Mais tous les candidats n'ont pas su profiter de cette opportunité, là encore faute de connaissances précises, sur le développement en série des fractions rationnelles.

a) En général établi.

b) Les relations sont rarement justifiées faute de penser à utiliser le 5°)c).

c) Question facile à condition de rappeler que $|x_\Upsilon| = 1$ pour $1 \le \Upsilon \le n$.

d) La décomposition de $\frac{P'w}{Pw}$, n'est pas toujours expliquée ; c'est pourtant un calcul classique dont le résultat était donné. Certains font appel à la dérivée logarithmique (de log Pw) , ce qui n'a pas de sens dans le domaine complexe. Le développement en série de $\frac{1}{t - x_\gamma}$ n'est pas toujours étudié, et comporte parfois des erreurs de calcul.

e) Ceux qui ont obtenu les valeurs des f_k ne voient pas pourquoi $f_k = 0$ faute d'exploiter le b) en liaison avec $|x_\Upsilon| = 1$.

f), g) Non abordées.

<u>III) CONSEILS AUX CANDIDATS</u>

On voudrait persuader les candidats faibles qu'un minimum de travail consistant à assimiler les définitions et théorèmes fondamentaux avec précision, ainsi que les calculs les plus usuels, peut leur permettre d'atteindre la moyenne.

Il est vain d'aborder une majorité de questions en paraphrasant l'énoncé sans jamais apporter les précisions nécessaires.

(Certaines copies ont une note ne dépassant pas 2 sur 20 avec 2 feuilles intercalaires).

Enfin, s'il est naturel d'essayer de rechercher le plus de questions possibles, après avoir lu entièrement l'énoncé, mieux vaut faire porter son effort sur les premières d'entre elles qui sont en général assez largement notées, sans être les plus difficiles.

Reste à espérer, lors des prochaines sessions, qu'on assistera à un reflux des candidats très faibles, ce qui ne pourra être obtenu que par un effort supplémentaire d'assimilation du programme de Mathématiques.